شماره گروه:

۲A

International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper
Spring 2008

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح پیشرفته ۲)
اسفند ۱۳۸۶

(لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخ‌نامه را با دقت مطالعه کنید)

۱) یک مثلث کاغذی که دارای زاویه‌ای برابر α است به چندین مثلث بریده می‌شود. آیا ممکن است که همه زاویه‌های تمام مثلث‌های به دست آمده کوچک‌تر از α باشند اگر

الف) $\alpha = ۷۰^\circ$ [۳ امتیاز]

ب) $\alpha = ۸۰^\circ$ [۳ امتیاز]

۲) یک ملخ نقطه‌مانند در نقطه P از محور اعداد حقیقی نشسته است. نقاط صفر و یک تله هستند. در هر حرکت، ما یک عدد مثبت انتخاب می‌کنیم، و سپس ملخ به سمت چپ یا راست (بسته به انتخاب خودش) به اندازه فاصله‌ای برابر این عدد می‌پرد. در هر لحظه، می‌بینیم ملخ در کجا قرار دارد. برای چه نقاطی به عنوان P، می‌توانیم اعداد را به گونه‌ای انتخاب کنیم که ملخ، مستقل از جهت‌هایی که برای پرش انتخاب می‌کند، در تله بیفتد؟ [۶ امتیاز]

۳) یک چندجمله‌ای از درجه $n > ۱$ دارای n ریشه متمایز $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ است. مشتق آن دارای ریشه‌های $y_۱, y_۲, \ldots, y_{n-۱}$ است. نامساوی روبه‌رو را ثابت کنید.

$$\frac{x_۱^۲ + \ldots + x_n^۲}{n} > \frac{y_۱^۲ + \ldots + y_{n-۱}^۲}{n-۱}$$ [۶ امتیاز]

۴) پدرام و بهمن، هر کدام چهارضلعی محدب می‌کشند که هیچ دو ضلعش موازی نیست. سپس هر یک از پسرها قطری در چهارضلعی خود کشیده و زاویه‌های بین این قطر و اضلاع چهارضلعی را محاسبه می‌کند. پدرام اعداد α، α، β و γ را (با ترتیب خاصی) به دست می‌آورد و بهمن نیز همین اعداد را (احتمالا با ترتیبی متفاوت) به دست می‌آورد. ثابت کنید که زاویه‌های بین قطرهای چهارضلعی پدرام برابر زاویه‌های بین قطرهای چهارضلعی بهمن است. [۷ امتیاز]

۵) همه اعداد طبیعی با ترتیبی خاص در یک سطر نوشته می‌شوند (هر عدد دقیقا یک‌بار ظاهر می‌شود). آیا لزوما بخشی از این سطر وجود دارد (که بیش از یک عدد داشته باشد) به طوری که مجموع تمام اعداد این بخش یک عدد اول باشد؟ (لازم نیست این بخش از اولین عدد سطر شروع شود) [۸ امتیاز]

۶) چشمان یازده جادوگر بسته است و کلاهی به رنگی از ۱۰۰۰ رنگ ممکن، بر سر هر یک از آن‌ها قرار داده می‌شود. سپس چشمان آن‌ها باز می‌شود و هر یک از جادوگرها همه کلاه‌ها غیر از کلاه خودش را می‌بینند. سپس در یک لحظه، هر یک از جادوگرها یکی از دو کارت، سیاه یا سفید، را به دیگر جادوگران نشان می‌دهد. بعد از آن، در نهایت، همه بایستی هم‌زمان رنگ کلاه خود را حدس بزنند. آیا آن‌ها می‌توانند چنین کاری را انجام دهند؟ (قبل از این برنامه، جادوگران ممکن است عملکرد بعدی خود را با هم هماهنگ کنند. جادوگران از ۱۰۰۰ رنگ ممکن برای کلاه‌ها اطلاع دارند.) [۸ امتیاز]

۷) دو دایره و سه خط به گونه‌ای داده شده‌اند که هر خط وترهایی با طول برابر از این دایره‌ها جدا می‌کند. نقاط برخورد این خطوط تشکیل یک مثلث می‌دهند. ثابت کنید که دایره محیطی آن از وسط پاره‌خطی که مرکزهای دو دایره داده شده را به هم متصل می‌کند، می‌گذرد. [۸ امتیاز]

International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper
Spring 2008

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح پیشرفته ۲)
اسفند ۱۳۸۶

(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed.)

Points	Problems	
	1.	A paper triangle with some angle equal to α is cut into several triangles. Is it possible that all angles of all the triangles obtained are smaller than α if
3	a)	$\alpha = 70°$
3	b)	$\alpha = 80°$?
6	2.	A pointlike grasshopper is sitting at point P of the real axis. Points 0 and 1 are traps. At each move, we choose a positive number, and then the grasshopper jumps to the left or to the right (at its choice) over the distance equal to this number. At any moment we see where the grasshopper is. For which points P we can choose numbers so that the grasshopper will fall into a trap independently of chosen directions for its jumps?
6	3.	A polynomial of degree $n > 1$ has n distinct roots $x_1, x_2, \dots, x_n$. Its derivative has roots $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. Prove the inequality $$\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n} > \frac{y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2}{n-1}$$
7	4.	Each of boys Pete and Basil drew a convex quadrilateral having no parallel sides. Then each of boys drew a diagonal in his quadrangle and calculated the angles between this diagonal and the sides of the quadrangle. Pete obtained numbers α, α, β and γ (in some order), and Basil obtained the same numbers (possibly in different order). Prove that the angles between diagonals of Pete's quadrilateral are the same as the angles between the diagonals of Basil's quadrilateral.
8	5.	All positive integers are written down in a row in some order (each number occurs exactly once). Does there necessarily exist some segment of this row (containing more than one number) such that the sum of all the numbers in this segment is a prime number? (The segment should not necessarily begin from the first number in the row.)
8	6.	Eleven wizards are blindfolded, and caps of some of 1000 colors are put on their heads. Then their eyes are unbind, and each of the wizards sees all caps except his own one. Then at the same moment each of the wizards shows one of two cards, white or black, to all others. Finally, after that all of them must simultaneously guess the colors of their caps. Can they arrange this? (Before the procedure the wizards may coordinate their further behavior; the wizards know possible 1000 colors of caps.)
8	7.	Given two circles and three lines such that each line cuts chords of equal length in these circles. The points of intersection of these lines form a triangle. Prove that its circumcircle passes through the midpoint of the segment connecting the centres of the given circles.