شماره گروه:

۲A

International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper
Spring 2011

مسابقه تورنمنت شهرها

سطح پیشرفته ۲

اسفند ۱۳۸۹

(لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخ‌نامه را با دقت مطالعه کنید)

۱) «بارون منچ‌هاوسن» مجموعه‌ای از ۵۰ سکه دارد که وزن آن‌ها اعداد طبیعی متمایزی هستند که از ۱۰۰ تجاوز نمی‌کنند، به طوری که مجموع وزن همه آن‌ها عددی زوج است. بارون ادعا می‌کند که امکان ندارد بتوان این سکه‌ها را در کفه‌های ترازو طوری تقسیم کرد که کفه‌ها در تعادل باشند. آیا ممکن است که این ادعای بارون درست باشد؟ [۴ امتیاز]

۲) فرض کنید در سیستم مختصات دکارتی یک متوازی‌السطوح مستطیلی داریم که حجم آن برابر با ۲۰۱۱ بوده و مختصات رئوس آن اعداد صحیح هستند. ثابت کنید یال‌های این متوازی‌السطوح موازی محورهای مختصات است. [۶ امتیاز]

۳) میله‌ای به شکل منشور با قاعده مثلث است. دو برش صفحه‌ای (سطح مقطع) از منشور را در نظر بگیرید، به گونه‌ای که برش‌ها نه یکدیگر را قطع می‌کنند و نه قاعده منشور را.

الف) آیا این برش‌ها می‌توانند مثلث‌های متشابه ولی غیرهم‌نهشت باشند؟ [۳ امتیاز]

ب) آیا این برش‌ها می‌توانند دو مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع‌های ۱ و ۲ باشند؟ [۴ امتیاز]

۴) N قطعه‌چوب آبی و N قطعه‌چوب قرمز داریم. مجموع طول همه قطعه‌ها از هر رنگ برابر است. می‌توان با قطعه‌هایی از هر رنگ یک Nضلعی ساخت. آیا همیشه می‌توان یک قطعه آبی و یک قطعه قرمز انتخاب کرده و رنگ آن‌ها را عوض کرد، به طوری که بتوان دوباره با چوب‌های هر رنگ یک Nضلعی ساخت؟ مسئله را برای حالات زیر حل کنید:

الف) $N=۳$. [۴ امتیاز]

ب) برای هر عدد طبیعی N که از ۳ بیش‌تر باشد. [۴ امتیاز]

۵) ساق‌های AB و CD از ذوزنقه $ABCD$ به ترتیب وترهایی از دایره‌های $\omega_۱$ و $\omega_۲$ بوده که مماس خارجی هستند. فرض کنید α و β اندازه کمان‌های $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ (کمان شامل نقطه تماس) باشد. فرض کنید دایره‌های $\omega_۳$ و $\omega_۴$ نیز دو دایره باشند که شامل وترهای AB و CD بوده، به طوری که اندازه کمان‌های $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ در آن‌ها به ترتیب β و α باشد (کمان‌های جدید $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ در همان طرفی از وترها قرار دارند که در دایره‌های اصلی بودند). ثابت کنید $\omega_۳$ و $\omega_۴$ نیز مماس هستند. [۸ امتیاز]

۶) درون هر خانه از یک جدول مربعی عددی نوشته شده است، به طوری که مجموع بزرگ‌ترین دو عدد در هر سطر برابر a است، و مجموع بزرگ‌ترین دو عدد در هر ستون برابر b است. ثابت کنید $a=b$. [۸ امتیاز]

۷) دو شرکت به نوبت برنامه‌نویس استخدام می‌کنند. هر شرکت برنامه‌نویس اول خود را به دل‌خواه انتخاب می‌کند، اما پس از آن، فردی را می‌تواند استخدام کند که با یکی از برنامه‌نویس‌های استخدام‌شده در این شرکت آشنا باشند. اگر شرکت نتواند فردی با این شرایط را پیدا کند، استخدام را متوقف می‌کند، در حالی که شرکت دیگر ممکن است بتواند ادامه دهد. در بین برنامه‌نویس‌ها ۱۱ نابغه وجود دارند. لیست برنامه‌نویس‌ها (به همراه این اطلاعات که چه کسی نابغه است)، و آشناهای آن‌ها، از قبل مشخص است. آیا لیستی وجود دارد که شرکتی که دوم استخدام می‌کند، بتواند مستقل از این‌که شرکت دیگر چه‌طور استخدام می‌کند، ۱۰ نابغه را استخدام کند؟ [۱۱ امتیاز]

International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper
Spring 2011

مسابقه تورنمنت شهرها
سطح پیشرفته ۲
اسفند ۱۳۸۹

(The result is computed from the three problems with the highest scores.)

Points	Problems	
4	1.	Baron Münchausen has a set of 50 coins whose masses are distinct positive integers not exceeding 100 and such that the total mass of all coins is an even number. Baron claims that it is not possible to distribute these coins between two sides of a balance to reach an equilibrium. Can it happen that baron's claim is true?
6	2.	Suppose we have Cartesian coordinate system and a rectangular parallelepiped of volume 2011 whose vertices have integer coordinates. Prove that the edges of this parallelepiped are parallel to the coordinate axes.
	3.	A beam is in the shape of a triangular prism. Two plane cuts are made through the prism so they do not intersect either each other or the bases of the prism.
3	a)	Can these cuts be similar but not congruent triangles?
4	b)	Can these cuts be two equilateral triangles with sides 1 and 2?
	4.	There are N blue and N red sticks. The sums of the lengths of all sticks of each color are the same. It is possible to construct an N-gon from sticks of each color. Can one always choose a blue stick and a red stick and interchange their colors so that it would be possible to construct an N-gon from sticks of each color again? Solve the problem
4	a)	for $N = 3$;
4	b)	for an arbitrary integer N exceeding 3.
8	5.	The lateral sides AB and CD of trapezoid $ABCD$ are respectively the chords of two circles ω_1 and ω_2 that touch each other externally. Let α and β be degree measures of the arcs $\widehat{AB}$ and $\widehat{CD}$ (the parts that touch). Let ω_3 and ω_4 be the circles also with the chords AB and CD such that the degree measures of arcs $\widehat{AB}$and $\widehat{CD}$ are β and α respectively (new arcs $\widehat{AB}$ and $\widehat{CD}$ are located on the same sides of the chords as the original ones). Prove that ω_3 and ω_4 touch as well.
8	6.	In every cell of a square table a number is written so that the sum of the two largest numbers in each row equals a, while the sum of the two largest numbers in each column equals b. Prove that $a = b$.
11	7.	Two companies hire programmers in turn. Each company chooses its first programmer arbitrarily, but then each new recruit must be acquainted with someone already hired by this company. If the company cannot comply with this rule, it stops hiring, while the other company may proceed. Among the programmers, there are 11 geniuses. The list of programmers (including the information who is genius) and their acquaintances is known in advance. Does there exist a list such that the company that starts hiring the second can hire 10 geniuses independently of how the other company acts?