شماره گروه:

۲A

International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper
Spring 2009

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح پیشرفته ۲)
اسفند ۱۳۸۷

خانه ریاضیات

(لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخ‌نامه را با دقت مطالعه کنید)

۱) یک مستطیل به چندین مستطیل کوچک‌تر تقسیم می‌شود. آیا ممکن است که برای هر جفت از مستطیل‌های به دست آمده، پاره‌خط متصل‌کننده مراکز آن‌ها، مستطیل دیگری را قطع کند؟ [۴ امتیاز]

۲) دنباله‌ای نامتناهی از اعداد طبیعی متمایز داده شده است. هر عضو آن (به جز عضو اول) میانگین حسابی یا میانگین هندسی دو عضو مجاور آن است. آیا در این دنباله لازم است که از جای مشخصی به بعد، همه اعضا، فقط میانگین حسابی یا میانگین هندسی اعضای مجاور باشند؟ [۴ امتیاز]

۳) علامتی در هر خانه جدولی ۱۰×۱۰ قرار دارد. ما می‌توانیم یک قطر شامل تعدادی زوج علامت را انتخاب کرده و یکی از علامت‌ها را پاک کنیم. حداکثر تعداد علامت‌هایی که با تکرار این روش می‌توان پاک کرد چندتا است؟ [۶ امتیاز]

۴) متوازی‌الوجوهی به وسیله سه صفحه به هشت شش‌وجهی تقسیم می‌شود که همه وجه‌های آن‌ها چهارضلعی است (هر صفحه دو جفت متناظر از وجه‌های مقابل را قطع می‌کند و دو وجه دیگر را قطع نمی‌کند). یکی از شش‌وجهی‌ها دارای کره محاطی است. ثابت کنید هر یک از این شش‌وجهی‌ها دارای یک کره محاطی است. [۶ امتیاز]

۵) فرض کنید $\binom{n}{k}$ تعداد راه‌های انتخاب (بدون درنظر گرفتن ترتیب) k شئ از مجموعه‌ای از n شئ باشد. ثابت کنید اگر اعداد طبیعی k و l از n کوچک‌تر باشند، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک اعداد طبیعی $\binom{n}{k}$ و $\binom{n}{l}$ بزرگ‌تر از ۱ است. [۸ امتیاز]

۶) عدد صحیح $n > ۱$ داده شده است. دو بازی‌کن به نوبت نقاطی را روی دایره مشخص می‌کنند: یکی از رنگ قرمز استفاده می‌کند و دیگری از رنگ آبی. وقتی n نقطه از هر رنگ مشخص شد، بازی تمام می‌شود. سپس هر بازی‌کن کمان با طول حداکثر و با نقاط انتهایی از رنگ خود که فاقد هر نقطه مشخص‌شده دیگر است، می‌یابد. بازیکنی که طول کمانش بلندتر باشد برنده است (اگر طول‌ها برابر باشد، یا هیچ‌یک از دو بازی‌کن چنین کمانی نداشته باشند، بازی با تساوی خاتمه یافته است). کدام بازی‌کن روشی دارد که، علی‌رغم هر تلاشی از سوی بازی‌کن دیگر، برنده شود؟ [۹ امتیاز]

۷) یک خانه حافظه رایانه محتوی عدد صحیح ۶ است. رایانه یک‌میلیون گام را انجام می‌دهد: رایانه در گام nام، عدد صحیح موجود در حافظه را به اندازه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این عدد و n افزایش می‌دهد. ثابت کنید در هر گام، رایانه عدد موجود در حافظه را به اندازه ۱ یا عددی اول افزایش می‌دهد. [۹ امتیاز]

International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper
Spring 2009

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح پیشرفته ۲)
اسفند ۱۳۸۷

(The result is computed from the three problems with the highest scores.)

Points	Problems	
4	1.	A rectangle is dissected into several smaller rectangles. Is it possible that for each pair of obtained rectangles, the line segment connecting their centers intersects some third rectangle?
4	2.	An infinite sequence of distinct positive integers is given. Each of its terms (except the first one) is either the arithmetic mean or the geometric mean of two neighboring terms. Is it necessary that in this sequence all terms starting from a certain one are only arithmetic means or only geometric means of the neighboring terms?
6	3.	There is a counter in each square of a board 10×10. We may choose a diagonal containing an even number of counters and remove any counter from it. What is the maximal number of counters which can be removed from the board by these operations?
6	4.	Three planes dissect a parallelepiped into eight hexahedrons such that all of their facets are quadrilaterals (each plane intersects two corresponding pairs of opposite facets of the parallelepiped and does not intersect the remaining two facets). One of the hexahedrons has a circumscribed sphere. Prove that each of these hexahedrons has a circumscribed sphere.
8	5.	Let $\binom{n}{k}$ be the number of ways that k objects can be chosen (regardless of order) from a set of n objects. Prove that if positive integers k and l are less than n, then integers $\binom{n}{k}$ and $\binom{n}{l}$ have a common divisor greater than 1.
9	6.	An integer $n > 1$ is given. Two players mark points on a circle in turn: one of them uses red color, and another one uses blue color. When n points of each color have been marked, the game is over. Then each player finds the arc of maximal length with ends of his color, which does not contain any other marked points. A player wins if his arc is longer (if the lengths are equal, or both players have no such arcs, the game has ended in a draw). Which player has a way to win for any action of his opponent?
9	7.	A cell of computer memory contains integer 6. The computer makes million steps: at step n, it increases the integer in the cell by the greatest common divisor of this integer and integer n. Prove that at each step, the computer increases the integer in the cell either by 1 or by a prime number.