شماره گروه:

۱A

International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper
Spring 2009

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح پیشرفته ۱)
اسفند ۱۳۸۷

(لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخ‌نامه را با دقت مطالعه کنید)

۱) بهادر و پدرام یک بازی به این صورت انجام می‌دهند: در ابتدا، دو عدد $\frac{۱}{۲۰۰۹}$ و $\frac{۱}{۲۰۰۸}$ روی تخته نوشته شده است. در هر نوبت، بهادر عدد دل‌خواه x را انتخاب می‌کند و پدرام یکی از اعداد روی تخته را برگزیده و آن را به میزان x افزایش می‌دهد. بهادر برنده است اگر عددی روی تخته برابر ۱ شود. آیا بهادر روشی دارد که، علی‌رغم هر تلاشی از سوی پدرام، برنده شود؟ [۳ امتیاز]

۲) الف) ثابت کنید که چندضلعی وجود دارد که آن را می‌توان توسط خطی به گونه‌ای به دو قسمت مساوی تقسیم کرد که ضلعی از چندضلعی نصف شود و ضلع دیگر به نسبت ۱ به ۲ تقسیم شود؟ [۲ امتیاز]
ب) آیا چندضلعی محدبی با این خاصیت وجود دارد؟ [۳ امتیاز]

۳) در هر مربع از یک جدول ۱۰۱×۱۰۱ خانه‌ای، به جز مربع مرکزی، یکی از دو علامت «چرخش» یا «مستقیم» نوشته شده است. مهره‌ای به نام «خودرو» می‌تواند از هر مربع مرزی از خارج جدول وارد شود (به صورت عمود بر مرز). اگر خودرو وارد مربعی با علامت «مستقیم» شود، در همان مسیر به مربع بعدی می‌رود. اگر خودرو وارد مربعی با علامت «چرخش» شود، آن‌گاه خودرو چرخشی ۹۰ درجه‌ای، به یک طرف به انتخاب خود، انجام می‌دهد. پارکینگی در مربع مرکزی جدول قرار دارد. آیا ممکن است علائم را به گونه‌ای قرار داد که خودرو نتواند به پارکینگ وارد شود؟ [۵ امتیاز]

۴) دنباله‌ای نامتناهی از اعداد طبیعی متمایز داده شده است. هر عضو آن (به جز عضو اول) میانگین حسابی یا میانگین هندسی دو عضو مجاور آن است. آیا در این دنباله لازم است که از جای مشخصی به بعد، همه اعضا، فقط میانگین حسابی یا میانگین هندسی اعضای مجاور باشند؟ [۵ امتیاز]

۵) قلعه‌ای با دیوار دایره‌ای‌شکل احاطه شده است که ۹ برج مراقبت دارد و شوالیه‌ها به دیده‌بانی در این برج‌ها می‌ایستند. بعد از هر ساعت، هر شوالیه به برج مراقبت مجاور می‌رود؛ به طوری که هر کدام از شوالیه‌ها همواره یا در جهت عقربه‌های ساعت یا خلاف آن حرکت می‌کند. در طول یک شب، هر شوالیه به دیده‌بانی همه برج‌های مراقبت می‌ایستد. در ساعتی، تعداد شوالیه‌ها در هر برج مراقبت کم‌تر از دو نیست، و در ساعتی دیگر، دقیقا ۵ برج مراقبت بوده‌اند که فقط یک شوالیه در آن‌ها بوده است. ثابت کنید که در ساعتی برجی بدون شوالیه بوده است. [۶ امتیاز]

۶) زاویه C در مثلث متساوی‌الساقین ABC برابر ۱۲۰° است. دو پرتو از رأس C وارد مثلث می‌شوند. زاویه بین آن‌ها ۶۰° است. پرتوها از قاعده AB منعکس شده (با توجه به قانون «زاویه تابش برابر است با زاویه بازتابش») و به ساق‌های مثلث می‌رسند به طوری که مثلث اصلی به پنج مثلث تقسیم می‌شود. سه مثلثی را که یک ضلع آن روی ضلع AB است در نظر بگیرید. ثابت کنید مساحت مثلث میانی برابر مجموع مساحت دو مثلث کناری است. [۷ امتیاز]

۷) فرض کنید $\binom{n}{k}$ تعداد راه‌های انتخاب k شئ (بدون درنظر گرفتن ترتیب) از مجموعه‌ای از n شئ باشد. ثابت کنید اگر اعداد طبیعی k و l از n کوچک‌تر باشند، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک اعداد طبیعی $\binom{n}{k}$ و $\binom{n}{l}$ بزرگ‌تر از ۱ است. [۹ امتیاز]

International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper
Spring 2009

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح پیشرفته ۱)
اسفند ۱۳۸۷

(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed.)

points	problems
3	1. Basil and Peter play the following game. Initially, there are two numbers on the board: 1/2009 and 1/2008. At each move, Basil chooses an arbitrary number x, and Peter selects one of the numbers on the board and increases it by x. Basil wins if some number on the board becomes equal to 1. Has Basil a way to win for any action of Peter?
	2.
2	a) Prove that there exists a polygon which can be dissected by a line segment into two equal parts so that some side of the polygon is divided in half, and another side at a ratio of 1:2?
3	b) Does there exist a convex polygon with this property?
5	3. In each square of the board 101×101, except the central one, there is one of two signs: "turn" or "straight". The chess piece "car" can enter any square on the boundary of the board from outside (perpendicularly to the boundary). If the car enters a square with the sign "straight" then the car goes to the next square in the same direction. If the car enters a square with the sign "turn" then the car makes a right-angle turn in any direction, by its choice. The central square of the board is occupied by a house. Is it possible to place the signs so that the car cannot enter the house?
5	4. We are given an infinite sequence of distinct positive integers. Each of its terms (except the first one) is either the arithmetic mean or the geometric mean of two neighboring terms. Is it necessary that in this sequence all terms starting from a certain one are only arithmetic means or only geometric means of the neighboring terms?
6	5. A castle is surrounded by a circular wall with 9 towers, and knights stand guard on these towers. After an hour, each of them goes to a neighboring tower so that each knight either moves always clockwise or counterclockwise. During a night, each knight stands guard on each tower. During some hour there were not less than two knights on each tower, and during another hour there were just 5 towers such that there was just a single knight on each of them. Prove that during some hour there were no knights on some tower.
7	6. Angle C in an isosceles triangle ABC equals $120°$. Two rays go from vertex C inwards the triangle. The angle between them equals $60°$. The rays reflect from base AB (according to the rule "the angle of incidence equals the angle of reflection") and reach the lateral sides so that the original triangle is divided into 5 ones. Consider those 3 triangles which adjoin side AB. Prove that the area of the middle triangle equals the sum of areas of the two extreme ones.
9	7. Let $\binom{n}{k}$ be the number of ways that k objects can be chosen (regardless of order) from a set of n objects. Prove that if positive integers k and l are less than n, then integers $\binom{n}{k}$ and $\binom{n}{l}$ have a common divisor greater than 1.