شماره گروه:

۱A

International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper
Spring 2008

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح پیشرفته ۱)
اسفند ۱۳۸۶

(لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخ‌نامه را با دقت مطالعه کنید)

۱) عدد N حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی است. ثابت کنید:

الف) می‌توان دو رقم در سمت راست این عدد نوشت به طوری که حاصل، یک مربع کامل باشد. [۲ امتیاز]

ب) اگر $N > ۱۲$ باشد، آن‌گاه این کار به صورت یکتا قابل انجام است. [۲ امتیاز]

۲) نقاط K و M به ترتیب بر اضلاع AB و BC از مثلث ABC به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که $KM||AC$. پاره‌خط‌های AM و KC در نقطه O برخورد می‌کنند. اگر بدانیم $AK=AO$ و $KM=MC$، ثابت کنید $AM=KB$. [۵ امتیاز]

۳) نواری (جدولی با عرض یک خانه) و به طول بی‌نهایت از دو طرف، داده شده است. دو خانه از این نوار تله بوده و N خانه بین آن‌ها قرار دارد. در ابتدا یک ملخ در یکی از این N خانه نشسته است. در هر حرکت، ما یک عدد صحیح نامنفی انتخاب می‌کنیم، سپس ملخ (بسته به انتخاب خودش) به سمت چپ یا راست از روی تعدادی خانه، که به اندازه عدد انتخاب شده است، می‌پرد. در هر لحظه، می‌بینیم ملخ در کجا قرار دارد. برای چه مقادیر N، می‌توانیم اعداد صحیح را به گونه‌ای انتخاب کنیم که ملخ، مستقل از محل اولیه‌اش و جهت‌هایی که برای پرش انتخاب می‌کند، در تله بیفتد؟ [۶ امتیاز]

۴) با استفاده از چهار رنگ، تعدادی (متناهی) نقطه در صفحه رنگ‌آمیزی شده‌اند. (تمام رنگ‌ها استفاده شده‌اند). هیچ سه نقطه‌ای از این نقاط روی یک خط راست قرار ندارند. ثابت کنید سه مثلث متمایز (که ممکن است متقاطع باشند) با رئوس رنگی وجود دارند به گونه‌ای که رئوس هر یک به سه رنگ متمایز رنگ‌آمیزی شده است و در داخل هر یک از مثلث‌ها هیچ نقطه رنگی نیست. [۶ امتیاز]

۵) ۹۹ کودک دور یک دایره ایستاده‌اند. در ابتدا هر یک از آن‌ها یک توپ دارد. در هر دقیقه، هر کودکی که توپی دارد آن را برای یکی از افراد مجاورش پرتاب می‌کند. اگر کودکی هم‌زمان دو توپ از افراد مجاورش دریافت کند، یکی از آن توپ‌ها برای همیشه از بین می‌رود. حداقل زمان ممکن که بعد از آن تنها یک توپ بتواند باقی بماند چقدر است؟ [۷ امتیاز]

۶) آیا اعداد طبیعی a، b، c و d وجود دارند به طوری که:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=۱ \qquad , \qquad \frac{a}{d}+\frac{c}{b}=۲۰۰۸$$

[۷ امتیاز]

۷) در چهارضلعی محدب $ABCD$ هیچ دو ضلعی موازی نیستند. زاویه بین قطر AC و اضلاع چهارضلعی (با یک ترتیبی) برابر ۱۶°، ۱۹°، ۵۵°، و ۵۵° است. تمام مقادیر ممکن را برای زاویه حاده بین اقطار AC و BD بیابید. [۸ امتیاز]

International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper
Spring 2008

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح پیشرفته ۱)
اسفند ۱۳۸۶

(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed.)

Points Problems

1. An integer N is a product of two consecutive positive integers. Prove that

2 a) one can write two decimal digits from the right of this integer so that the result is a perfect square;

2 b) if N>12 then this can be fulfilled in the unique way.

5 2. Points K and M are chosen on sides AB and BC of triangle ABC respectively such that $KM||AC$. Segments AM and KC meet at point O. It is known that $AK=AO$ and $KM=MC$. Prove that $AM=KB$.

6 3. Given a cell strip (1 cell wide), infinite in both directions. Two cells of the strip are traps, and there are N cells between them. Initially, a grasshopper sits in one of these N cells. At each move, we choose a nonnegative integer, and then the grasshopper jumps to the left or to the right (at its choice) over the chosen number of cells. At any moment, we see where the grasshopper is. For which values N we can choose integers so that the grasshopper will fall into a trap independently of its initial position and of chosen directions for its jumps?

6 4. Several (a finite number) of points in the plane are painted in four colors (all colors appear). No three of these points are collinear. Prove that there exist three distinct (possibly intersecting) triangles with painted vertices such that the vertices of each of them are painted into three distinct colors, and each triangle contains no colored points in its interior.

7 5. 99 children stand along a circle. Initially, each of them has a ball. Each minute, each child having a ball throws it to one of his neighbors. If some child simultaneously gets two balls from his neighbors, then one of these balls vanishes forever. What is the least possible period after which there can appear only one ball left?

7 6. Do there exist positive integers a, b, c, d such that

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=1,\ \frac{a}{d}+\frac{c}{b}=2008$$

8 7. A convex quadrangle $ABCD$ has no parallel sides. The angles between diagonal AC and the sides of the quadrangle are equal (in some order) 16°, 19°, 55° and 55°. Find all possible values of the acute angle between diagonals AC and BD.