



(لطفاً پیش از شروع، صفحه اول پاسخنامه را با دقت مطالعه کنید)

- (۱) قالب پنیری داده شده است. شخصی می‌تواند عدد مثبت $a \neq 1$ (که لزومی ندارد عدد صحیح باشد) انتخاب کرده و قالب را طوری ببرد که نسبت وزن قطعات حاصل ۱ به a باشد، سپس هر یک از قطعات حاصل را نیز با همان نسبت ببرد و به همین ترتیب ادامه دهد. آیا او می‌تواند این کار را به گونه‌ای انجام دهد که بعد از تعداد متناهی برش، همه قطعات را بتوان در دو دسته با وزن برابر جای داد؟ [۳ امتیاز]
- (۲) در مثلث ABC نقطه M وسط ضلع AC ، و نقطه P روی ضلع BC قرار دارد. پاره خط AP پاره خط BM را در نقطه O قطع می‌کند. در ضمن $BO=BP$. نسبت OM به PC را تعیین کنید. [۴ امتیاز]
- (۳) ۹۹۹ عدد روی محیط یک دایره قرار دارند که هر یک از آنها برابر ۱ یا -1 است. هر دو عدد هم وجود دارد. فردی حاصل ضرب هر ۱۰ عدد متوالی را محاسبه کرده و سپس همه حاصل ضرب‌ها را جمع می‌کند.
الف) حداقل مقدار ممکن حاصل جمع چه قدر است؟ [۳ امتیاز]
ب) و حداکثر مقدار ممکن حاصل جمع چه قدر است؟ [۳ امتیاز]
- (۴) مجموع ارقام عدد طبیعی n برابر ۱۰۰ است. آیا مجموع ارقام عدد n^3 می‌تواند برابر 100^3 باشد؟ [۶ امتیاز]
- (۵) الف) سه سوارکار در خلاف جهت عقربه‌های ساعت روی مسیری دایره‌ای حرکت می‌کنند. فقط یک نقطه در راه وجود دارد که یک سوارکار می‌تواند از دیگری سبقت بگیرد. آیا امکان دارد که آنها به مدتی که به اندازه دلخواه طولانی است با سرعت‌های ثابت و دوه‌دو متمایز به سوارکاری خود ادامه دهند؟ [۳ امتیاز]
ب) اگر ده سوارکار باشند، پاسخ چه خواهد بود؟ [۵ امتیاز]
- (۶) یک خم چندضلعی غیربسته در صفحه به گونه‌ای است که با خودش برخورد نمی‌کند و دارای ۳۱ ضلع است (اضلاع مجاور روی یک خط نیستند). فردی همه خط‌های شامل این اضلاع را رسم کرده است. این کار به ترسیم ۳۱ خط (که بعضی از آنها ممکن است روی هم قرار گرفته باشند) می‌انجامد. حداقل تعداد خط‌های متمایز چند تا است؟ [۸ امتیاز]
- (۷) کک‌هایی در بعضی خانه‌های یک صفحه شطرنجی 10×10 قرار دارند (یک کک در یک خانه). در هر دقیقه، هر کک از خانه‌اش به یک خانه مجاور (یعنی به مربعی که دارای ضلع مشترک با مربع اولیه است) می‌پرد؛ همه کک‌ها هم‌زمان جهش می‌کنند. هر کک جهت جهش خود را حفظ می‌کند تا جایی که پرش بعدی او را از صفحه خارج کند؛ در این صورت، کک جهت پرش خود را به خلاف جهت تغییر می‌دهد، و به همین صورت ادامه می‌دهد. در تمام مدت یک ساعت، هیچ دقیقه‌ای نبود که خانه‌ای توسط دو یا تعداد بیش‌تری کک اشغال شود. حداکثر تعداد کک‌های روی صفحه را بیابید. [۱۱ امتیاز]



(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed.)

points problems

- 3 1. A piece of cheese is given. One may choose any positive (not necessarily integer) number $a \neq 1$ and cut the piece with ratio of weights $1:a$, then cut any of existing pieces with the same ratio and so on. Can one proceed so that after some finite number of cuts, all the cheese can be gathered into two piles with equal weights?
- 4 2. In triangle ABC , point M is the midpoint of side AC , point P lies on side BC . Segment AP meets BM at point O . Furthermore $BO = BP$. Determine the ratio of $OM:PC$.
- 3 3. There are 999 numbers placed on a circumference, each one equals either to 1 or to -1 . Both values occur. One computes all products of every 10 consecutive numbers and then he sums up all the products.
 - 3 a) What is the minimal possible value of the sum?
 - 3 b) And what is the maximal possible value of the sum?
- 6 4. The sum of digits of a positive integer n equals 100. Can the sum of digits of n^3 equal to 100^3 ?
- 3 5.
 - 3 a) Three knights are riding along a circular road counterclockwise. There is a single point on the road where a knight may surpass another one. Is it possible that they ride for an arbitrarily long time with pairwise distinct constant speeds?
 - 5 b) What is the answer if there are ten knights?
- 8 6. A polygonal curve in the plane is not closed, has no self-intersections and consists of 31 edges (adjacent edges are not on a same line). One has drawn all lines containing these edges. This results in 31 lines (some of them may coincide). What is the minimal possible number of distinct lines?
- 11 7. There are fleas in some squares of a 10×10 chessboard (a single flea in a square). Once a minute each flea jumps from its square to an adjacent one (that is, to a square having a common side with the first one); all fleas jump simultaneously. Each flea keeps the same direction of jumps until the next jump must go out of the board; in this situation, the flea changes the direction to an opposite one, and so on. During a whole hour, there was no minute when any square was occupied by two or more fleas. Find the maximal possible number of fleas on the board.