



Mathematics A-lympiad

به نام خدا  
خانه ریاضیات اصفهان

دور مقدماتی بیست و چهارمین مسابقه A-Lympiad

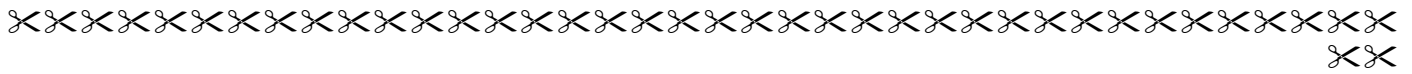
آبان ماه ۱۳۹۱



خانه ریاضیات اصفهان

- مدت مسابقه ۵ ساعت و ۳۰ دقیقه است که ۳۰ دقیقه نیز برای پذیرایی به آن اضافه می شود.
- به توصیه های صفحه اول دفترچه سؤال حتماً توجه کنید.
- از جدا کردن برگه های دفترچه ها پاسخ نامه ها و نیز برگه های پیش نویس اکیداً خودداری کنید.
- از بلند صحبت کردن به طوری که برای سایر تیم ها مزاحمت ایجاد می کند جداً خودداری فرمائید.
- مشخصات اعضای حاضر گروه خود را در قسمت مشخص شده در پایین این برگه بنویسید و از نوشتن نام یا شماره گروه در سایر برگه های پاسخ نامه جداً خودداری کنید.
- در پایان مسابقه، کلیه برگه های پیش نویس، پاسخ نامه و برگه سئوالات باید تحویل داده شوند.
- مراقبان جلسه به هیچ وجه پاسخگوی پرسش های شما در مورد سئوالات نیستند. لطفاً اصرار نکنید.
- استفاده از ماشین حساب بلامانع است ولی همراه داشتن تلفن همراه روشن غیرمجاز است.

در مستطیل زیر چیزی ننویسید



Mathematics A-lympiad

دور مقدماتی بیست و چهارمین مسابقه A-Lympiad

آبان ماه ۱۳۹۱



خانه ریاضیات اصفهان

نام و نام خانوادگی اعضای تیم:	شهر:	نام مدرسه:	کلاس:
۱- .....	.....	.....	.....
۲- .....	.....	.....	.....
۳- .....	.....	.....	.....
۴- .....	.....	.....	.....

در مستطیل زیر چیزی ننویسید



## راهنمای مسائل دور مقدماتی مسابقه ریاضی A-لیمپیاد ۲۰۱۲-۲۰۱۳

مسائل این آزمون A-لیمپیاد از یک مسئله مقدماتی، دو مسئله تکمیلی و یک مسئله نهایی تشکیل شده است.

### توصیه های عمومی برای کار روی مسائل:

- ابتدا کل متن را بخوانید تا همه کارهایی را که باید انجام دهید بدانید.
- در طی کار روی مسائل مقدماتی و تکمیلی، همواره نگاهی به وقت داشته باشید؛ تا برای مسئله نهایی زمان کافی برای شما باقی بماند.
- در صورت امکان، کارها را در گروه تقسیم کنید و هرگاه نیاز شد با یکدیگر بحث نمایید.
- چنانچه کارها را تقسیم کرده اید، قبل از شروع به کار روی مسئله نهایی، روی نتایج مسائل مقدماتی و تکمیلی با یکدیگر بحث کنید.

### سوالات تحقیقی:

در چند سوال، شما با عبارت "بررسی کنید که آیا ... " مواجه می شوید. همیشه آن چیزی را که بررسی کرده اید به طور دقیق بیان کنید. در صورت لزوم در مورد مسائل کوچکتر تحقیق کنید و موارد دیگر را نیز در نظر گرفته و از فقط جواب دادن به سوال ها فراتر روید. پاسخ های شما با توجه به این موارد ارزیابی خواهد شد.

### آنچه که باید تحویل دهید:

- پاسخ مسئله نهایی به صورت مشروح
  - به عنوان پیوست: نتایج مسائل مقدماتی و تکمیلی
- ممکن است نسخه های کپی پاسخ های شما در اختیار مصححین قرار گیرد و واضح است که این کپی ها باید قابل خواندن باشد؛ بنابراین خوانا بنویسید، از خودکار آبی یا مشکی استفاده کنید و هرگز از مداد در کشیدن شکل ها استفاده نکنید. در صورت نیاز از برگه های پیشنویس استفاده کنید. (در پایان می بایست پیشنویس ها را نیز تحویل دهید، البته توجه کنید که مطالب نوشته شده در پیشنویس در ارزیابی مورد توجه قرار نمی گیرند).

### برای ارزیابی پاسخ شما، موارد زیر مورد توجه مصححین است:

- خوانا بودن و قابل فهم بودن استدلالها، و نیز شفاف بودن پاسخ ها به مسئله نهایی
- کامل بودن کل کاری که تحویل داده شده
- به کارگیری ریاضیات
- استدلال ها و نحوه توجیه شما برای انتخاب گزینه ها (واقع گرایی ممکن است نقش مهمی در این بخش داشته باشد)
- سطح پاسخهای ارائه شده
- ارائه: ظاهر و نحوه ارائه، خوانا بودن، ساختار، شیوه استفاده از پیوست ها و غیره
- خلاقیت (ریاضی) به کار گرفته شده در حل مسائل

لذت ببرید و موفق باشید!



## چهارمین نفر





### مقدمه :

یک فروشگاه زنجیره‌ای بزرگ قوانین ویژه‌ای دارد : اگر شما چهارمین نفر در صف صندوق باشید، تمام خرید شما مجانی خواهد بود!  
این قوانین سبب خواهد شد که فروشگاه زنجیره‌ای تعداد صندوق‌های مورد نیاز خود را متناسب با تعداد مشتریان درون یک فروشگاه انتخاب کند به نحوی که مشتریان بتوانند به سرعت هزینه خرید خود را بپردازند. مسلماً فروشگاه ترجیح می‌دهد که تا حد ممکن کالای مجانی کمتری به مشتریان داده شود.

صندوق ۳	صندوق ۲	صندوق ۱	
			مشتری در حال حساب کردن کالا
			اولین مشتری در صف
			دومین مشتری در صف
			سومین مشتری در صف
	رایگان!		چهارمین مشتری در صف

در ابتدا، قوانینی که در وبسایت فروشگاه زنجیره‌ای گفته شده را شرح می‌دهیم :

- اگر شما چهارمین خریدار در صف صندوق هستید، خرید شما از مغازه مجانی خواهد بود.
- مشتری که در حال حساب کردن خرید است، جزو افراد درون صف به حساب نمی‌آید؛ بنابراین چهارمین مشتری در صف، پنجمین مشتری از محل صندوق است.
- این قانون زمانی در مورد شما صادق است که هیچ صف پرداخت کوتاه‌تر دیگری برای انتخاب وجود نداشته باشد.
- به محض اینکه شما نفر چهارم در صف شدید، باید یکی از فروشندگان را مطلع سازید. برای اطلاع دادن این موضوع تا رسیدن نوبت خود صبر نکنید چرا که شاید در آن زمان نتوانید ادعای خود را ثابت کنید.
- روزهای تعطیل فروشگاه‌ها تعطیلند.

این قوانین برای تمامی مسئله‌های این A-لیمپیاد برقرار خواهند بود.



### مسئله مقدماتی :

#### یک سوپرمارکت کوچک :

تعداد مشتریانی که (در آن زمان) به صف می رسند	زمان رسیدن به صف پرداخت
1	8.01
2	8.02
1	8.07
2	8.14
1	8.15
1	8.16
1	8.22
1	8.24
1	8.25
1	8.29
1	8.31
1	8.33
1	8.34
1	8.39
1	8.45
1	8.50
1	8.56

یک سوپرمارکت محلی کوچک ۲ صندوق دارد. صاحب آن تصمیم دارد همان قوانین فروشگاه زنجیره‌ای بزرگ را اجرا کند. با این وجود، مجانی دادن کالاها به مشتریان برای او ضرر زیادی دارد. بنابراین، صاحب سوپرمارکت تصمیم دارد ابتدا شرایط را بسنجد و یک روز قوانین را به صورت آزمایشی اجرا نماید و طی این مدت از چهارمین نفری که در صف پرداخت انتظار می‌کشد هزینه‌ای دریافت نکند.

در روز آزمایش، یکی از صندوق‌ها از ساعت ۸:۰۰ باز بوده است. صاحب سوپرمارکت زمان‌هایی را که مشتریان وارد صف صندوق شده‌اند یادداشت کرده است. این زمان‌ها را می‌توانید در جدول این صفحه ببابید.

به طور میانگین، حساب کردن کالاهای هر مشتری ۳ دقیقه طول می‌کشد.

#### مسئله ۱ :

تغییرات طول صف پرداخت را بین ساعات ۸:۰۰ و ۹:۰۰ بررسی کنید. به طور واضح بررسی‌های خود را شرح دهید. میانگین زمان انتظار برای هر مشتری را حساب نمایید. آیا هیچ مشتری طی این مدت خرید خود را رایگان دریافت کرده است؟



### مسئله‌های تکمیلی :

#### صندوق شماره دو :

از ساعت ۹:۰۰ روز آزمایش دو صندوق مشغول به کار شدند.

باز هم صاحب سوپرمارکت زمان‌ها را یادداشت کرده است. این زمان‌ها را می‌توانید در جدول این صفحه مشاهده کنید. فرض کنید که مشتریان کوتاه‌ترین صف را انتخاب کرده‌اند.

#### مسئله ۲ :

تغییرات طول صف‌های پرداخت را بین ساعات ۹:۰۰ تا ۱۰:۰۰ بررسی کنید. این تغییرات را به صورت واضح نمایش دهید. همچنین به طور واضح بررسی‌های خود را توضیح دهید. میانگین زمان انتظار برای هر مشتری را محاسبه نمایید. آیا هیچ مشتری طی این مدت خرید خود را رایگان دریافت کرده است؟

#### مسئله ۳ :

صاحب سوپرمارکت می‌خواهد در زمانی که تعداد مشتری کمی وجود دارد، فقط یکی از صندوق‌ها مشغول به کار باشد. به این ترتیب کارمند دیگر می‌تواند قفسه‌ها را پر کند و یا کارهای دیگری را انجام دهد. از طرفی، صاحب سوپرمارکت می‌خواهد از مجانی دادن کالاها هم اجتناب کند.

بنابراین تصمیم می‌گیرد که صندوق دوم را فقط زمانی باز کند که ۳ مشتری (به جز مشتری که در حال حساب کردن کالاها است) در صف باشند. به این ترتیب، مشتری بعدی می‌تواند فوراً اقدام به حساب کردن خرید خود نماید. دومین صندوق دوباره در اولین زمان ممکن بسته خواهد شد.

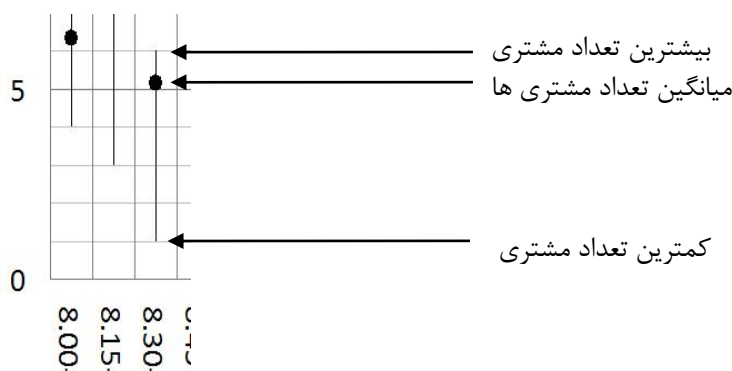
در صورتی که صاحب سوپرمارکت این سیاست را پی می‌گرفت، تغییرات طول صف‌های پرداخت را بین ساعت ۹:۰۰ تا ۱۰:۰۰ بررسی کنید. مشخص کنید که در چه زمان‌هایی یک صندوق و در چه زمان‌هایی ۲ صندوق باز بوده است (به طور جداگانه). میانگین زمان انتظار برای هر مشتری را محاسبه نمایید و مشخص نمایید که آیا هیچ مشتری خرید خود را رایگان دریافت کرده است. تمامی انتخاب‌ها و فرض‌های خود در حین حل مسئله را با ذکر دلیل بیان نمایید.

زمان رسیدن	تعداد مشتریانی که (در آن زمان) به صف‌های پرداخت می‌رسند
9.00	1
9.01	1
9.02	1
9.04	1
9.08	1
9.09	1
9.10	2
9.11	1
9.16	1
9.19	1
9.21	2
9.25	1
9.27	1
9.32	2
9.33	3
9.34	1
9.35	3
9.36	1
9.37	1
9.39	1
9.43	1
9.48	1
9.50	1
9.53	1
9.57	1

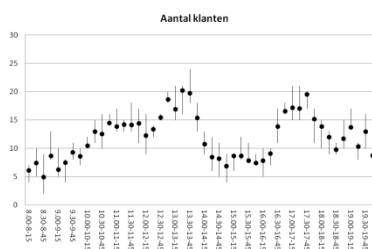


### مسئله نهایی :

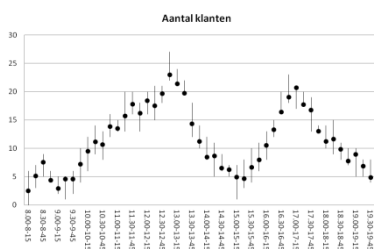
در نتیجه شمارش‌های مکرر، نرخ ورود مشتری (تعداد مشتریانی که برای حساب کردن کالاها به صف‌های پرداخت می‌رسند) در یک روز در فروشگاه‌های بزرگ، یک مقدار نسبتاً مشخص است. با در نظر گرفتن تعداد زیادی از روزهای "عادی" (روزهای نزدیک جشن‌ها و روزهای نزدیک تعطیلات در نظر گرفته نمی‌شوند) محاسبه میانگین نرخ ورود مشتری در هر ربع ساعت امکان‌پذیر است. کمترین و بیشترین تعداد مشتری را نیز می‌دانیم. این اطلاعات در نموداری به شکل زیر نمایش داده می‌شود :



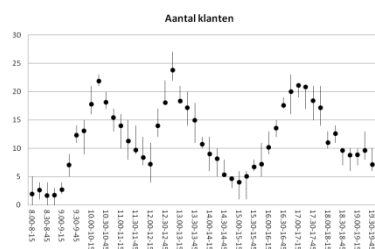
در پیوست ۱ تا ۳ شما نمودارهای زیر را در اندازه واقعی خواهید دید :



نمودار ۱



نمودار ۲



نمودار ۳

بر مبنای این نوع نمودارها، مدیر یک فروشگاه باید تعداد صندوق‌های مورد نیاز در طول روز را برنامه‌ریزی کند. از آنجایی که مجانی دادن کالاها ضرر زیادی دارد، مدیر فروشگاه به زمان‌بندی نیاز دارد که چهار مشتری در یک صف ایجاد نکند. از طرف دیگر، برای صرفه‌جویی در هزینه‌ها باید کمترین تعداد ممکن صندوق مشغول به کار باشد. در اینجا هم به طور میانگین، حساب کردن کالاها هر مشتری ۳ دقیقه طول می‌کشد و این فروشگاه ۸ صندوق دارد.

فرض کنید آنقدر اطلاعات وجود دارد که مدیر می‌تواند برای هر روز یک نمودار نرخ ورود مربوط به آن روز داشته باشد. با این وجود، تحلیل دقیق این نمودارها برای هر روز زمان بسیار زیادی می‌گیرد. مدیر روشی نیاز دارد که بتواند به سرعت برنامه‌ریزی هر روز را انجام دهد.



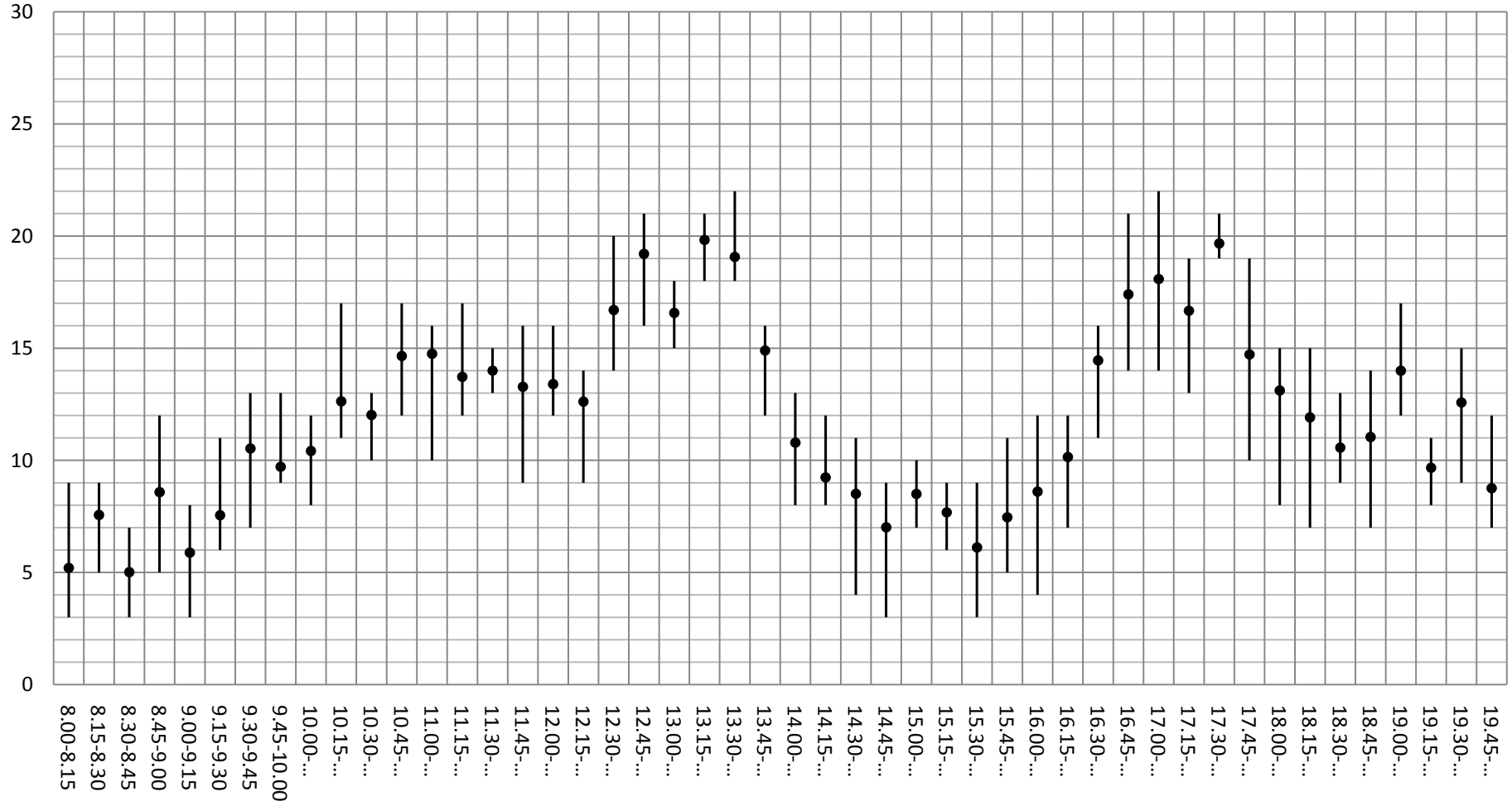
**مسئله ۴ :**

دستورالعمل واضحی به مدیر ارائه دهید که بتواند سریعاً برنامه‌ریزی‌های لازم را بر اساس یک نمودار نرخ ورود دلخواه انجام دهد، که در آن بتواند فوراً تشخیص دهد که کدام صندوق در چه زمانی باید باز یا بسته شود.

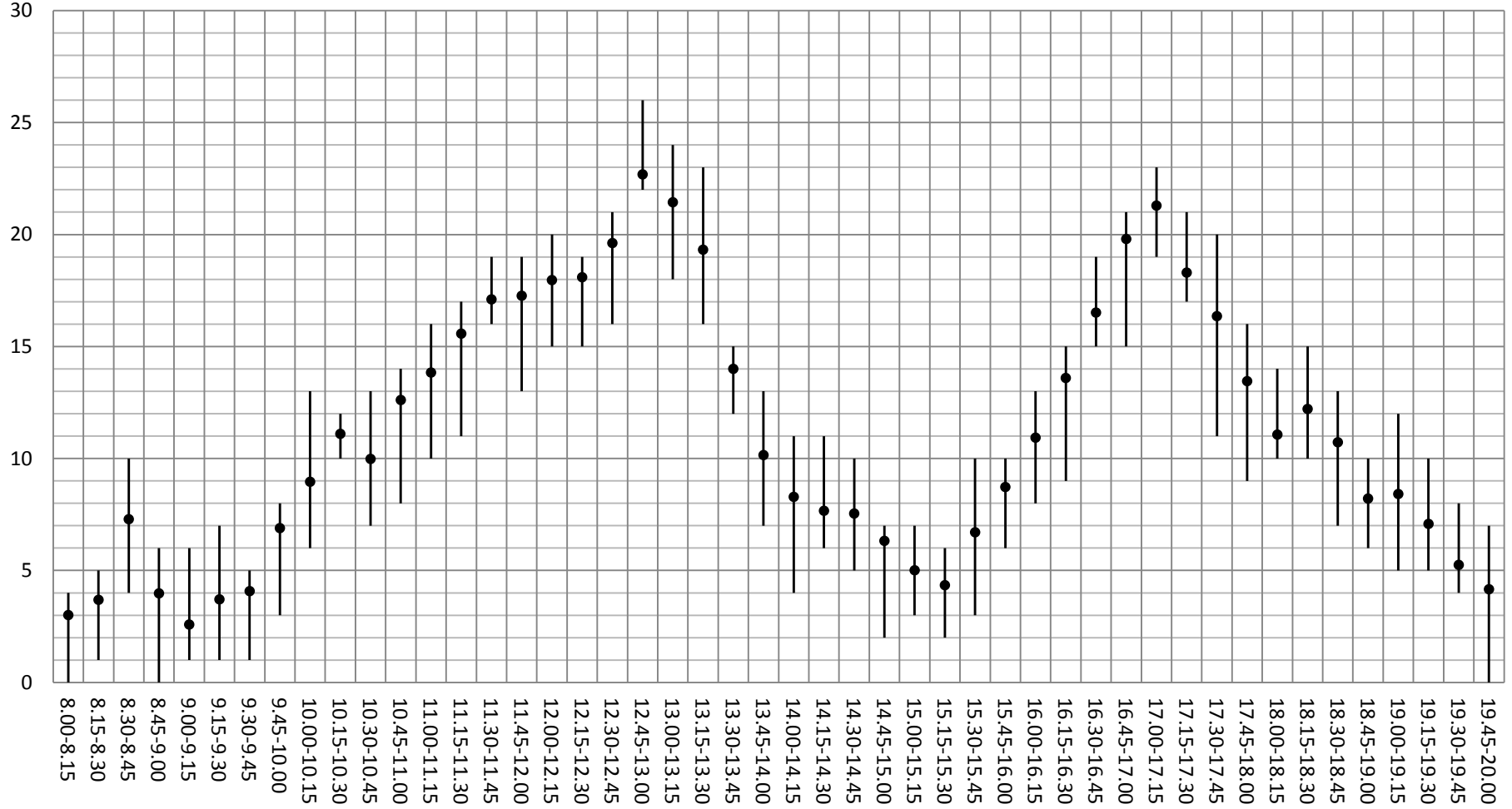
به عنوان ضمیمه راه حل، نشان دهید که دستورالعمل ارائه شده توسط شما برای نمودارهای داده شده در پیوست به خوبی عمل می‌کند و توضیح دهید که چگونه عملکرد صحیح آن را تایید می‌کنید.



نرخ ورود مشتری در روز های عادی هفته



نرخ ورود مشتری در روز چهارشنبه



## نرخ ورود مشتری در روزهای پنج‌شنبه

