



Isfahan Mathematics House  
Preliminary Round Assignment  
22<sup>th</sup> Mathematics A-Olympiad  
November 2010

خانه ریاضیات اصفهان  
دور مقدماتی بیست و دومین  
مسابقه A-لیمپیا، آذر ۱۳۸۹



# پارکینگ بیشتر، با هزینه کمتر



Preliminary round assignment 22<sup>st</sup> Mathematics A-lympiad





## راهنمای مسائل دور مقدماتی مسابقه ریاضی A-لیمپیا ۲۰۱۰-۲۰۱۱

مسائل این آزمون A-لیمپیا از دو مساله مقدماتی و سه مساله نهایی تشکیل شده است.

### توصیه‌های عمومی برای کار روی مسائل:

- ابتدا کل متن را بخوانید تا همه کارهایی را که باید انجام دهید بدانید.
- در طی کار روی بخش مقدماتی و مسائل بعد از آن، همواره نگاهی به وقت داشته باشید؛ تا برای مسائل مرحله نهایی زمان کافی برای شما باقی بماند.
- در صورت امکان، کارها را در گروه تقسیم کنید و هرگاه نیاز شد با یکدیگر بحث نمایید.
- در صورتی که کارهای خود را تقسیم کرده‌اید، قبل از شروع به کار روی مسائل مرحله نهایی، در مورد نتایج مسائل مقدماتی با هم گفت‌وگو کنید.
- برای دو مساله اول مرحله نهایی، مهم است که شما ابتدا یک برنامه‌ریزی کاری برای پژوهشی که انجام می‌دهید وضع کنید. هر مساله تصریح کرده است که چه چیزهایی را باید تحویل دهید.
- پاسخ به مسائل مقدماتی (۱ و ۲) نباید به همراه پاسخ مشروح مسائل نهایی (۳، ۴ و ۵) باشد. نتایج مسائل مقدماتی را به شکل پیوست ارائه کنید.

### آنچه باید ارایه دهید:

- پاسخ مشروح خود به مسائل نهایی.
  - به عنوان پیوست: نتایج مسائل مقدماتی (مسائل ۱ و ۲).
- ممکن است نسخه‌های کپی پاسخ‌های شما در اختیار مصححین قرار گیرد و واضح است که این کپی‌ها باید قابل خواندن باشد؛ بنابراین خوانا بنویسید، از خودکار مشکی استفاده کنید و هرگز از مداد در کشیدن شکل‌ها استفاده نکنید. در صورت نیاز از برگه‌های پیش‌نویس استفاده کنید. (در پایان می‌بایست پیش‌نویس‌ها را نیز تحویل دهید، البته توجه کنید که مطالب نوشته شده در پیش‌نویس در ارزیابی مورد توجه قرار نمی‌گیرند)

### برای ارزیابی پاسخ شما، موارد زیر مورد توجه مصححین است:

- خوانا بودن و قابل فهم بودن استدلال‌ها، و نیز شفاف بودن پاسخ‌ها به مسائل نهایی،
- کامل بودن کل کاری که تحویل داده شده،
- به‌کارگیری ریاضیات،
- استدلال‌ها و نحوه توجیه شما برای انتخاب گزینه‌ها (واقع‌گرایی ممکن است نقش مهمی در این بخش داشته باشد)،
- سطح پاسخ‌های ارائه شده،
- ارائه: ظاهر و نحوه ارائه، خوانا بودن، ساختار، شیوه استفاده از پیوست‌ها و غیره.

## لذت ببرید و موفق باشید!



## پارکینگ بیشتر، با هزینه کم تر

فرودگاه شیفل برای پارکینگش از نرخ‌های مختلفی استفاده می‌کند: یعنی همه افراد هزینه روزانه یکسانی نمی‌پردازند. در شکل زیر می‌توانید یک نمونه از تبلیغات آن را مشاهده کنید که این موضوع را نشان می‌دهد. در این آزمون A-لیمپیاد بررسی می‌کنید که چه گونه درآمد یک پارکینگ با ظرفیت ۵۰۰ دستگاه خودرو (برای مثال در یک فرودگاه) را حداکثر نمایید.

### پارکینگ هوشمند شیفل

آیا به دنبال جای پارک امن و ارزان در حوالی فرودگاه می‌گردید؟ در این صورت پارکینگ هوشمند شیفل اقتصادی‌ترین راه برای پارک کردن خودرو در فرودگاه شیفل است. برای استفاده از پارکینگ هوشمند شیفل شما باید حداقل یک هفته زودتر از طریق اینترنت جای پارک خودروی خود را رزرو کرده و هزینه آن را با کارت اعتباری‌تان بپردازید.

#### نمونه‌هایی از هزینه استفاده از پارکینگ هوشمند شیفل

نرخ عادی	نرخ استفاده از پارکینگ هوشمند شیفل
۳ روز ۵۲/۵۰ یورو	۳۷/۵۰* یورو
۸ روز ۸۵/۰۰ یورو	۴۹/۵۰ یورو
۱۵ روز ۱۳۰/۵۰ یورو	۸۹/۵۰ یورو
۲۲ روز ۱۷۶/۰۰ یورو	۱۱۰/۰۰ یورو

\* این نرخ برای کسانی است که دو هفته قبل از سفر، پارکینگ خودروی خود را رزرو کرده باشند.

نرخ‌ها و خالی‌بودن جا را بررسی کرده و محل پارک خودروی خود را رزرو کنید.



تخفیف ویژه  
با  
رزرو زودتر

در طول سال ۲۰۱۰ شما حتی از تخفیف بیش‌تری هم برخوردار می‌شوید، اگر زودتر رزرو کنید.

برای مثال اگر شما رزرو مکان پارک را حداقل شش هفته زودتر انجام دهید، شما تنها ۹۵ یورو برای ۲۲ روز می‌پردازید. (۴/۳۲ به ازای هر روز)

ظرفیت این تخفیف ویژه محدود است، بنابراین زود اقدام کنید، تا آن را از دست ندهید.

هم‌اکنون رزرو کنید!



## مقدمه

یک راه برای مدیریت آسان پارکینگ با ظرفیت ۵۰۰ خودرو می تواند مانند روش زیر باشد:  
یک نرخ ثابت روزانه تعیین کنید، برای مثال ۱۰ یورو، و بنشینید ببینید چه تعدادی خودرو در هر روز وارد می شود و هر کدام به چه مدت می مانند. وقتی ظرفیت پارکینگ تکمیل شود، خودروهای تازه وارد شانس برای پارک ندارند، اگرچه ممکن است آن‌ها حاضر باشند بیش از ۱۰ یورو در روز پردازند.

این روش بهینه‌ای برای درآمد زیاد نیست. روزهایی خواهد بود که ظرفیت زیادی از پارکینگ خالی می ماند. به اضافه این که این نرخ برای کسانی که می خواهند برای طولانی مدت خودروی خود را در پارکینگ پارک کنند تا به تعطیلات بروند ممکن است زیاد باشد. برای چنین اشخاصی صحیح است که گفته شود هر چه نرخ پایین تر باشد، آن‌ها بیش تر خواهند آمد. از طرف دیگر افرادی هستند که به دلیل شغل شان اهمیت چندانی به نرخ بیش تر نمی دهند به شرطی که مطمئن باشند که جای پارک خواهند داشت. این مشتریان تجاری معمولاً فقط چند روز محدود توقف می کنند و مایوس کردن این مشتریان که حاضر به پرداخت پول بیشتر هستند فقط به این دلیل که قبلاً همه ظرفیت پارکینگ را با نرخ پایین تر فروخته ایم شرم آور است.

به طور خلاصه:

- بایستی تعدادی محل پارک با هزینه پارکینگ بالاتر برای مشتریانی رزرو کنید که مطمئن هستید خواهند آمد اگر فقط بدانند جای پارک خواهند داشت (و قیمت برای آن‌ها ملاک نیست)
- باید بتوانید قیمت کمتری برای کسانی که به تعطیلات می روند و می توانند از قبل محل پارک را رزرو کنند، در نظر بگیرید.

به شرطی که داده‌های کافی داشته باشید، می توانید این را دوباره برای هر روز تعیین کنید. در این آزمون A-لیمپیا بررسی می کنید که چه طور به بهترین وجه یک پارکینگ را با تغییر نرخ‌ها پر کنید.

## بخش اول: هفته اول

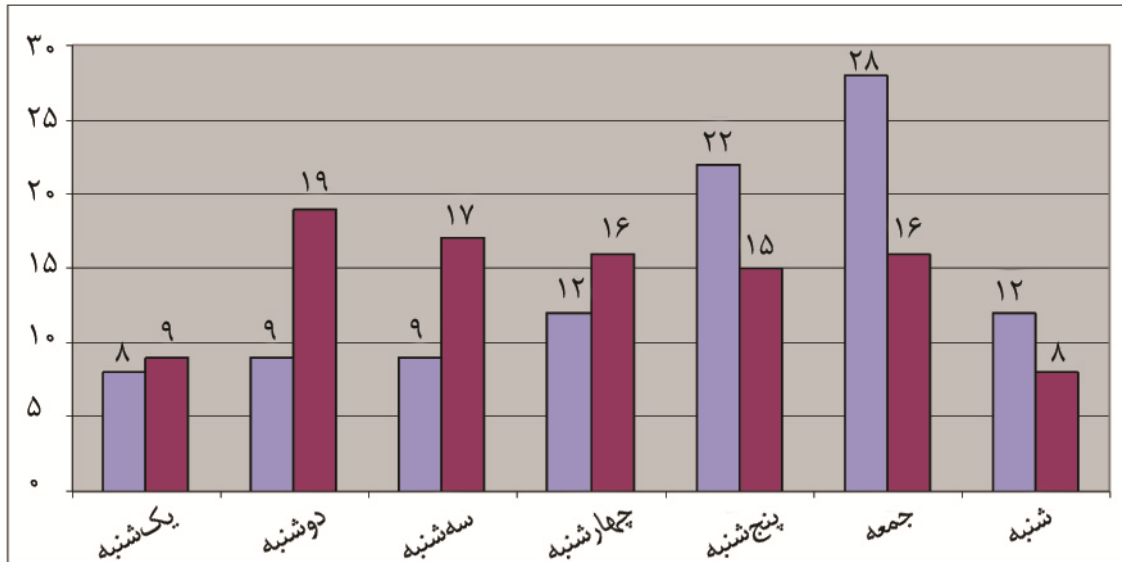
ما دو نوع مشتری برای پارکینگ خود فرض می کنیم:

- مشتریان تجاری که نرخ بالا را می پردازند و مدت کوتاهی توقف می کنند.
  - مشتریان گردشگر که به دلیل نرخ پایین تر (تخفیف) جذب شده‌اند و مدت طولانی توقف می کنند.
- الگوی روزانه ورود هر دو نوع مشتری را تحقیق مشخص می کند، نمودار زیر را ببینید. این نمودار برای یک هفته معمولی و خارج از ایام تعطیلات است. به طور متوسط در یک چنین هفته‌ای ۵۰۰ مشتری تجاری هستند که به طور متوسط خودروی خود را به مدت ۲ روز در پارکینگ قرار می دهند، و ۲۰۰ گردشگر که به طور متوسط خودروی خود را برای چهار روز در پارکینگ قرار می دهند. این جا فرضیات بعدی را در نظر می گیریم:
- هر کس خودروی خود را در پارکینگ قرار می دهد، این کار را صبح انجام می دهد.



• هر کس خودروی خود را از پارکینگ خارج می کند، این کار را عصر انجام می دهد.

نمودار ۱



درصد مشتریان گردشگر که در یک روز هفته وارد می شوند.

(۲۰۰ مشتری گردشگر در هفته؛ خودروها به طور متوسط چهار روز در پارکینگ هستند)

درصد مشتریان تجاری که در یک روز هفته وارد می شوند.

(۵۰۰ مشتری تجاری در هفته؛ خودروها به طور متوسط دو روز در پارکینگ هستند)

یکی از چیزهایی که می توانید از این نمودار ببینید این است که ۱۵٪ مشتریان تجاری روز پنجشنبه وارد پارکینگ می شوند و خودروی خود را جمعه شب از پارکینگ خارج می کنند.

## مساله مقدماتی ۱

از صبح روز یکشنبه با پارکینگ خالی شروع می کنیم.

انتظار داریم در کل چند ماشین از مشتری های تجاری بعد از ظهر روز چهارشنبه در پارکینگ باشد؟ شنبه شب چه طور؟

## مساله مقدماتی ۲

انتظار می رود که پارکینگ صبح یکشنبه هفته بعد خالی نباشد. برای مثال خودروی گردشگرانی که روز جمعه آمده اند در پارکینگ هست. بعد از گذشت تعداد مشخصی روز، وضعیت پایدار می شود و تعداد مشتریان در هر دوشنبه مساوی خواهد بود، همین طور در هر سهشنبه، و ....

اگر نرخ پارکینگ برای هر مشتری تجاری ۱۰ یورو در روز، و برای مشتری گردشگر ۶ یورو در روز باشد، درآمد مورد انتظار هفتگی پارکینگ را (برای وضعیت پایدار که در بالا گفته شد) محاسبه کنید.

آنچه باید تحویل دهید: یک پیوست شامل پاسخ مشروح شما به هر دو سؤال مقدماتی.

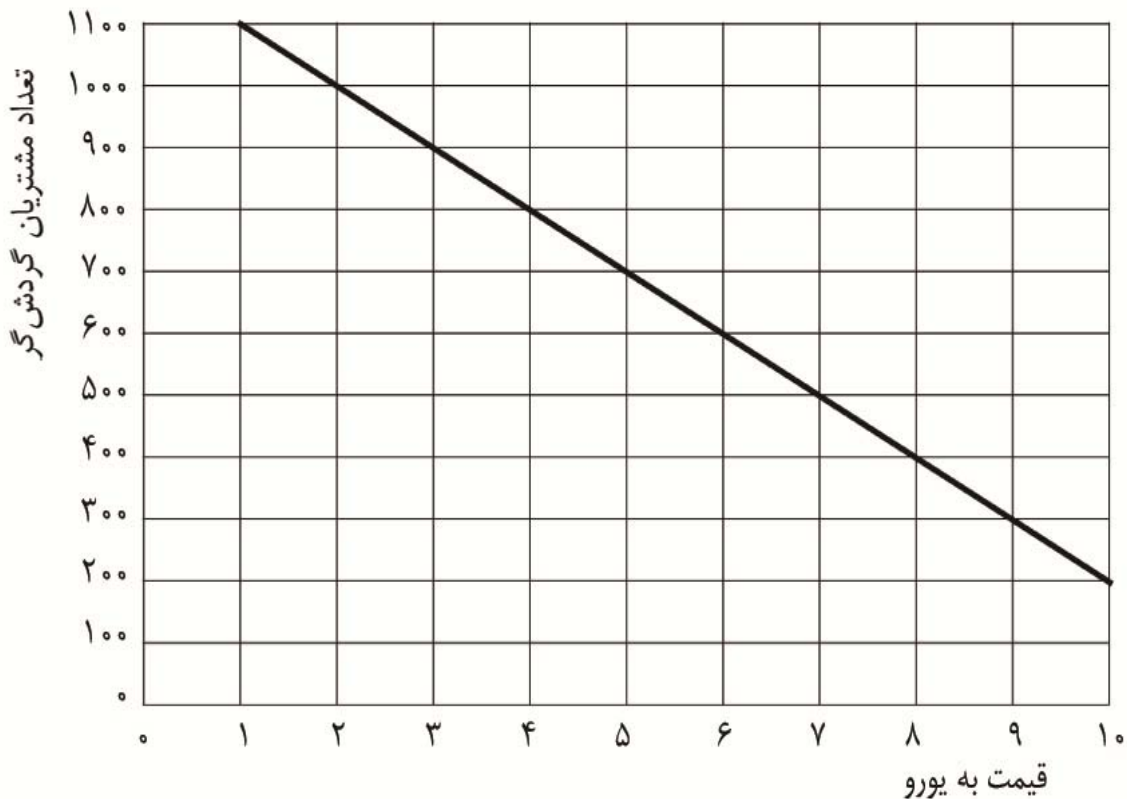


## بخش دوم: نرخ روزانه برای گردش گران در طول ایام تعطیلات

ما هم چنان فرض می کنیم که بر اساس نمودار قبلی و نرخ ۱۰ یورو در روز، تعداد مشتریان تجاری ۵۰۰ نفر در هفته است. بخشی از پارکینگ برای این مشتریان رزرو شده است. مابقی جاها می تواند توسط مشتریان گردشگر تکمیل شود. قبل تر فرض کردیم ۲۰۰ گردشگر در هفته داریم. هفته هایی که مدارس تعطیل هستند، انتظار داریم که تقاضا برای محل پارک از سوی افراد گردشگر به ۲۰۰ تا در هفته محدود نشود. تعداد مشتریان گردشگر به نرخ پارکینگ بستگی دارد. انتظار داریم چه تعداد مشتری گردشگر بیایند و آن ها راضی به پرداخت چه نرخ برای پارکینگ خواهند بود؟ اگر گردشگران فکر کنند که نرخ پارکینگ بیش از اندازه گران است، بیش تر آن ها به طور اتوماتیک خودروی خود را به فرودگاه نخواهند آورد. آن ها از کسی خواهند خواست که آن ها را به فرودگاه برساند، یا از قطار استفاده می کنند. این مشتریان گردشگر با نرخ های ارزان و سوسه می شوند: یک نمونه از تبلیغات را در صفحات اولیه این تمرین مشاهده کردید.

مطالعه ای انجام شده است درباره تعداد مشتریان گردشگر در یک هفته که می توان در طول فصل تعطیلات با یک نرخ مشخص انتظار داشت. این مطالعه به نمودار ذیل منجر شده است:

نمودار ۲





واضح است که، با توجه به ظرفیت پارکینگ که ۵۰۰ خودرو است، نرخ ۱ یورو برای تعطیلات ایده خوبی نیست، ... پس چه نرخ خوبی است؟ ۶ یورویی که در دو تمرین اول داشتیم؟ یا آن را تغییر می‌دهید؟ در ضمن، ممکن بود اگر تعدادی از مشتری‌های تجاری را ناامید می‌کردید می‌توانستید به درآمد هفتگی مورد انتظار بیش‌تری دست یابید، و یا برعکس، به نفع شما است که مکان‌های رزرو شده برای همه مشتریان تجاری را حفظ کنید؟ (درصدهای نمودار ۱ هم چنان معتبر هستند.)

### مساله نهایی ۳

(الف)

ابتدا روشی بسازید برای بررسی این که چه نرخ برای گردش‌گران حداکثر درآمد پارکینگ را ایجاد می‌کند. شرح کاملی از روش خود ارائه دهید.

(ب)

بررسی خود را مطابق روش به دست‌آمده انجام داده، ببینید که آیا این روش نتایج مورد نظر را می‌دهد، و در صورتی که لازم است، روش خود را اصلاح کنید.

آن چه باید تحویل دهید: توضیح مشروحي از روش خود، که با محاسبات (اولیه) روشن شده باشد، و یک نقد موشکافانه از کیفیت نتیجه بررسی‌تان.

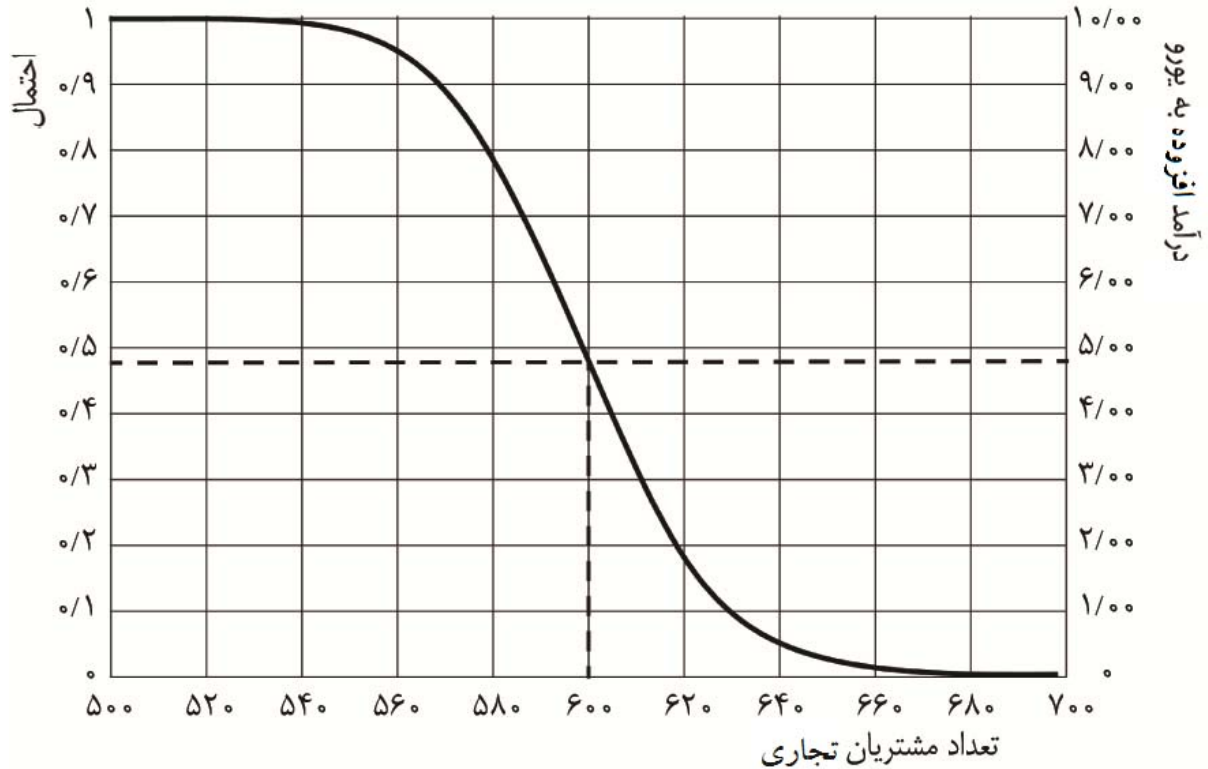
### بخش سوم: مشتری‌های تجاری

تا این لحظه فرض کردیم که ۵۰۰ مشتری تجاری در هفته داریم. اما آیا واقعاً ۵۰۰ مشتری تجاری داریم؟ این قابل پیش‌بینی نیست.... مهم است که بتوان چیزی در مورد آن گفت: به هر حال، مشتریان گردش‌گر از هفته‌ها قبل جای پارک خودروی خود را رزرو می‌کنند، در حالی که مشتری‌های تجاری ناگهان ظاهر می‌شوند. بنابراین لازم است که برای مشتری‌های تجاری جا رزرو کنید، اما چند تا؟ مسلماً جاهای پارک خالی درآمدی ندارند!

تحقیق نشان می‌دهد که یک توزیع احتمال برای تعداد مشتری‌های تجاری وجود دارد. این توزیع نشان می‌دهد که شما تقریباً می‌توانید روی داشتن آن هفته‌ای ۵۰۰ مشتری تجاری حساب کنید، اما در بعضی هفته‌ها تعداد آن‌ها بیش‌تر خواهد بود، و خیلی به ندرت به ۷۰۰ نزدیک می‌شود!  
این تحقیق به نمودار بعدی منجر شده است:



### نمودار ۳



در این نمودار می‌توانید نتیجه مورد انتظار از رزرو کردن فضاهای بیشتری از پارکینگ برای مشتری‌های تجاری را ببینید. هرچه فضاهای پارک بیش‌تری رزور شده باشد، درآمد تجاری افزوده مورد انتظار بابت استفاده از یک فضای پارکینگ کم‌تر می‌شود. این را می‌توان با مثال زیر نشان داد:

در نمودار، شما می‌توانید ببینید که احتمال داشتن حداقل ۶۰۰ مشتری تجاری ۰/۴۸ است. درآمد تجاری افزوده مورد انتظار از رزرو ۶۰۰ (به جای ۵۹۹) فضای پارک با نرخ ۱۰ یورو برابر است با:  $€ 480 = 0.48 \times 10000$ .

بنابراین سه عامل در تعیین درآمد بهینه نقش آفرینی می‌کنند:

- توزیع ورود مشتری‌ها در طول هفته (نمودار ۱)
- تعداد مشتری‌های گردش‌گر که به نرخ پارکینگ وابسته است (نمودار ۲)
- توزیع احتمال تعداد مشتری‌های تجاری (نمودار ۳)

### مساله نهایی ۴

اثر توزیع احتمال نمودار ۳ بر وضعیت بهینه‌ای را که در تمرین نهایی ۳ یافته بودید بررسی کنید. بنابراین دیگر شما درآمد را به دست نمی‌آورید، بلکه درآمد مورد انتظار را محاسبه می‌کنید. بار دیگر، ابتدا یک روش بیابید، سپس روش خود را توضیح دهید، و بررسی خود را براساس روش به دست آمده انجام دهید.





آنچه باید تحویل دهید: توضیح مشروحی از بررسی خود، که با محاسبات (اولیه) بیان شده باشد، و یک نقد موشکافانه از کیفیت نتیجه بررسی تان.

## مساله نهایی ۵

در مساله‌های قبل تصویری از یک روش برای حداکثر کردن سود یک پارکینگ به دست آوردید که در آن، با افرادی سر و کار دارید که جای پارک را زودتر رزرو می‌کنند، و می‌خواهند تا جایی که ممکن است کم‌تر پول بدهند (مشتری‌های گردش‌گر)، و افرادی که تقریباً برای آن‌ها مهم نیست که چه قدر پول می‌دهند به شرطی که یک جای پارک داشته باشند (مشتری‌های تجاری).

تحلیلی کیفی از این روش بنویسید: نقاط ضعف کجاست، تعیین کدام یک از داده‌ها آسان و یا سخت است، چه داده‌ای را می‌خواهید داشته باشید و غیره. تجربیات خود را در این تحلیل به کار ببرید و به سایر مساله‌های نهایی ارجاع دهید تا نتیجه‌گیری‌های شما را تأیید کند.

آنچه باید تحویل دهید: بازنگری موشکافانه این روش به شکل یک مقاله کوتاه در یک مجله تخصصی. این مقاله شامل محاسبات روشن‌کننده مطلب است که نباید از نصف مقاله تجاوز کند.