



(لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخنامه را با دقت مطالعه کنید)

(۱) علامت a^b را به معنای a^b در نظر بگیرید. ترتیب محاسبه عبارت $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7^7}}}}}}$ را باید با پرانتزگذاری مشخص کرد (۵ جفت پرانتز لازم است). آیا ممکن است پرانتزها را به دو ترتیب متفاوت قرار داد به گونه‌ای که حاصل عبارت یکسان شود؟ [۳ امتیاز]

(۲) تعدادی نقطه روی صفحه مشخص شده‌اند که هیچ سه‌تایی از آنها روی یک خط نیستند. تعدادی از این نقاط با پاره‌خط‌هایی به هم متصل شده‌اند. فرض کنید هر خطی که از هیچ‌یک از این نقاط عبور نکند، تعداد زوجی از این پاره‌خط‌ها را قطع می‌کند. ثابت کنید هر یک از نقاط مشخص شده، نقطه انتهایی تعدادی زوج از پاره‌خط‌ها است. [۴ امتیاز]

(۳) برای هر عدد طبیعی n ، علامت $O(n)$ را به معنای بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه فرد آن در نظر بگیرید. با داشتن اعداد طبیعی دلخواه $x_1 = a$ و $x_n = b$ ، دنباله نامتناهی از اعداد طبیعی به صورت زیر بسازید:

$$x_n = O(x_{n-1} + x_{n-2}) \text{ که در آن } n = 3, 4, \dots \text{ است.}$$

(الف) ثابت کنید از جایی به بعد، همه اعضای دنباله برابر عدد صحیح یکسانی هستند. [۲ امتیاز]

(ب) این عدد صحیح چگونه تعیین می‌شود اگر اعداد a و b را بدانیم؟ [۲ امتیاز]

(۴) تعدادی صفر و یک روی یک خط نوشته شده‌اند. در این خط، جفت رقم‌هایی را در نظر بگیرید (نه لزوماً مجاور) که رقم سمت چپ ۱ و رقم سمت راست صفر باشد. M را تعداد جفت‌هایی در نظر بگیرید که در آن، ۱ و صفر با تعداد زوجی رقم (که می‌تواند صفر باشد) از هم جدا شده‌اند و N را تعداد جفت‌هایی در نظر بگیرید که در آن، ۱ و صفر با تعداد فردی رقم از هم جدا شده‌اند. ثابت کنید $M \geq N$. [۴ امتیاز]

(۵) فرض کنید X نقطه دلخواهی درون یک چهاروجهی باشد. از هر رأس چهاروجهی، خطی موازی پاره‌خط متصل‌کننده X به نقطه هم‌رسی میانه‌های وجه مقابل رسم کنید. ثابت کنید این چهار خط در یک نقطه به هم می‌رسند. [۴ امتیاز]



(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed.)

points problems

- 3 1. Let a^b denote the number a^b . The order of operations in the expression $7^7^7^7^7^7^7^7^7^7$ must be determined by parentheses (5 pairs of parentheses are needed). Is it possible to put parentheses in two distinct ways so that the value of the expression be the same?
- 4 2. Several points on the plane are given; no three of them lie on the same line. Some of these points are connected by line segments. Assume that any line that does not pass through any of these points intersects an even number of these segments. Prove that each of the given points is an end of an even number of the segments.
- 2 3. For each positive integer n , denote by $O(n)$ its greatest odd divisor. Given arbitrary positive integers $x_1 = a$ and $x_2 = b$, construct an infinite sequence of positive integers as follows: $x_n = O(x_{n-1} + x_{n-2})$, where $n = 3, 4, \dots$
 - 2 a) Prove that starting from some place, all members of the sequence are equal to the same integer.
 - 2 b) How can this integer be determined if we know integers a and b ?
- 4 4. Several zeros and ones are written down in a line. In this line, consider the pairs of digits (not necessarily neighboring) such that the left digit is 1 and the right digit is 0. Let M be the number of the pairs in which 1 and 0 are separated by an even number of digits (possibly zero), and let N be the number of the pairs in which 1 and 0 are separated by an odd number of digits. Prove that $M \geq N$.
- 4 5. Suppose that X is an arbitrary point inside a tetrahedron. Through each vertex of the tetrahedron, draw a straight line that is parallel to the line segment connecting X with the intersection point of the medians of the opposite facet. Prove that these four lines meet at one point.