شماره گروه:

International Mathematics
Tournament of Towns
Junior O level paper
Spring 2008

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح مبتدی ۱)
اسفند ۱۳۸۶

(لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخ‌نامه را با دقت مطالعه کنید)

۱) ضلع‌های روبه‌رو در شش‌ضلعی محدب $ABCDEF$ به ترتیب موازی یکدیگر هستند: (یعنی $AB||DE$، $BC||EF$ و $CD||FA$). اگر $AB=DE$ باشد، ثابت کنید $BC=EF$ و $CD=FA$. [۳ امتیاز]

۲) ۱۰ پاره‌خط مساوی در یک صفحه داده شده‌اند. تمام نقاط تقاطع آن‌ها علامت‌گذاری شده‌اند. هر نقطه تقاطع، هر یک از پاره‌خط‌های شامل آن نقطه را به نسبت ۳ به ۴ تقسیم می‌کند. حداکثر تعداد نقاط علامت‌گذاری شده را بیابید. [۵ امتیاز]

۳) ۳۰ کارت داده شده است. بر روی ۱۰ کارت عدد a، ۱۰ کارت عدد b و بر روی ۱۰ کارت دیگر عدد c نوشته شده است (اعداد a، b و c دوبه‌دو متمایز هستند). برای هر ۵ کارت، ۵ کارت دیگر وجود دارد به طوری که مجموع اعداد نوشته شده روی تمام آن ۱۰ کارت برابر صفر شود. ثابت کنید یکی از اعداد a، b، c برابر صفر است. [۵ امتیاز]

۴) تمام اعداد طبیعی n را که $(n+۱)!$ مضربی از مجموع $۱!+۲!+\ldots+n!$ است، مشخص کنید. (در این‌جا $k!$ حاصل‌ضرب تمام اعداد طبیعی از ۱ تا k است) [۶ امتیاز]

۵) مربع‌های یک جدول ۱۰×۱۰ به رنگ‌های قرمز، آبی و سفید رنگ‌آمیزی شده‌اند. هر دو مربعی که ضلع مشترک داشته باشند دارای رنگ‌های متمایز هستند. تعداد مربع‌های قرمز ۲۰ تا است.

الف) ثابت کنید همیشه می‌توان ۳۰ مستطیل از این جدول جدا کرد که هر یک از آن‌ها از دو مربع، یکی سفید و یکی آبی تشکیل شده باشد. [۲ امتیاز]

ب) یک مثال از رنگ‌آمیزی جدول ارائه کنید که بتوان ۴۰ مستطیل با شرایط بالا جدا کرد (و توضیح دهید چرا این مثال، شرایط مورد نظر را دارا است). [۲ امتیاز]

ج) یک مثال از رنگ‌آمیزی جدول ارائه کنید که نتوان بیش از ۳۰ مستطیل با شرایط بالا جدا کرد (و توضیح دهید چرا این مثال، شرایط مورد نظر را دارا است). [۲ امتیاز]

(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed.)

Scores	Problems	
3	1.	The opposite sides of convex hexagon $ABCDEF$ are respectively parallel (i.e., $AB \| DE$, $BC \| EF$, $CD \| FA$). Given that $AB=DE$, prove that $BC=EF$ and $CD=FA$.
5	2.	In a plane, given 10 equal line segments. All their intersection points are marked. Each intersection point divides each segment containing it as 3:4. Find the maximum number of the marked points.
5	3.	Given 30 cards, each containing a number: ten cards contain a, ten other cards contain b, and ten remaining ones contain c (the numbers a, b, c are pairwise distinct). For each five cards there exist five other ones such that the sum of numbers in all ten cards equals zero. Prove that one of the numbers a, b, c equals zero.
6	4.	Determine all positive integers n such that $(n+1)!$ is a multiple of the sum $1!+\ldots+n!$. (Here, $k!$ is the product of all positive integers from 1 to k inclusive).
	5.	The squares of a board 10×10 are colored red, blue and white. Any two squares having a common side have distinct colors. The number of red squares is 20.
2	a)	Prove that one always can cut out 30 rectangles such that each of them consists of two squares, one being white and one being blue.
2	b)	Present an example of coloring such that one can cut out 40 rectangles of the above kind (and explain why the example fits).
2	c)	Present an example of coloring such that one cannot cut out more than 30 rectangles of the above kind (and explain why the example fits)