



(لطفاً پیش از شروع، صفحه اول پاسخنامه را با دقت مطالعه کنید)

- (۱) در یک  $2009$ -ضلعی محدب، همه قطرها رسم شده‌اند. خطی این  $2009$ -ضلعی را قطع می‌کند اما از هیچ‌یک از رئوس آن عبور نمی‌کند. ثابت کنید این خط تعداد زوجی از قطرهای  $2009$ -ضلعی را قطع می‌کند. [۳ امتیاز]
- (۲) علامت  $a^b$  را به معنای  $a^b$  در نظر بگیرید. ترتیب محاسبه عبارت  $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7^{7^{7^{7^{7^{7^{7^{7^{7^7}}}}}}}}}}}}$  را باید با پرانتزگذاری مشخص کرد (۵ جفت پرانتز لازم است). آیا ممکن است پرانتزها را به دو ترتیب متفاوت قرار داد به گونه‌ای که حاصل عبارت یکسان شود؟ [۴ امتیاز]
- (۳) وحید می‌خواهد مجموعه‌ای از مکعب‌های هم‌اندازه بسازد و روی هر وجه آن‌ها یک رقم بنویسد به گونه‌ای که بتوان هر عدد  $30$ -رقمی صحیح نامنفی را با این مکعب‌ها نمایش داد. حداقل تعداد مکعب‌ها در مجموعه‌ای با این خاصیت چیست؟ (اعداد  $7$  و  $8$  با چرخاندن به هم تبدیل نمی‌شوند). [۴ امتیاز]
- (۴) عددی طبیعی را  $10\%$  افزایش دادیم و عددی طبیعی به دست آوردیم. آیا ممکن است با این کار، مجموع ارقام را دقیقاً  $10\%$  کاهش داده باشیم؟ [۴ امتیاز]
- (۵) در لوزی  $ABCD$ ، زاویه  $A$  برابر  $120^\circ$  است. نقاط  $M$  و  $N$  روی ضلع‌های  $BC$  و  $CD$  چنان انتخاب می‌شوند که زاویه  $NAM$  برابر  $30^\circ$  شود. ثابت کنید مرکز دایره محیطی مثلث  $NAM$  بر قطری از لوزی واقع است. [۵ امتیاز]



*(The result is computed from the three problems with the highest scores.)*

points    problems

- 3    1. In a convex 2009-gon, all diagonals are drawn. A line intersects the 2009-gon but does not pass through any of its vertices. Prove that the line intersects an even number of diagonals.
- 4    2. Let  $a^b$  denote the number  $a^b$ . The order of operations in the expression  $7^7 \wedge 7^7 \wedge 7^7 \wedge 7^7 \wedge 7^7$  must be determined by parentheses (5 pairs of parentheses are needed). Is it possible to put parentheses in two distinct ways so that the value of the expression be the same?
- 4    3. Vlad is going to make a set of cubical blocks of the same size and to write a digit on each of their sides so that it would be possible to form every 30-digit integer with these blocks. What is the minimal number of blocks in a set with this property? (The digits 6 and 9 do not turn one into another.)
- 4    4. We increased some positive integer by 10% and obtained a positive integer. Is it possible that in doing so we decreased the sum of digits exactly by 10%?
- 5    5. In rhombus  $ABCD$ , angle  $A$  equals  $120^\circ$ . Points  $M$  and  $N$  are taken on sides  $BC$  and  $CD$  so that angle  $NAM$  equals  $30^\circ$ . Prove that the circumcenter of triangle  $NAM$  lies on a diagonal of the rhombus.