



(لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخنامه را با دقت مطالعه کنید)

(۱) شش صندوق میوه محتوی هلو، آلو و سیب هستند. تعداد آلوها در هر صندوق برابر مجموع تعداد سیب‌های صندوق‌های دیگر است، و تعداد سیب‌ها در هر صندوق برابر مجموع تعداد هلوهای صندوق‌های دیگر است. ثابت کنید تعداد کل میوه‌ها مضربی از ۳۱ است. [۳ امتیاز]

(۲) کاوه و لهراسب کیک‌ی به شکل مربع را تقسیم می‌کنند. کاوه نقطه‌ای از کیک را (که روی مرز نباشد) انتخاب می‌کند. پس از آن، لهراسب برشی مستقیم‌الخط از این نقطه تا مرز (در راستای دل‌خواه) می‌زند. سپس کاوه برش مستقیم‌الخط دوم را عمود بر برش اول، از نقطه انتخاب شده تا مرز انجام می‌دهد. تکه کوچک‌تر از دو تکه ایجاد شده به لهراسب داده می‌شود. لهراسب میل دارد که حداقل یک چهارم کیک را بگیرد. آیا کاوه می‌تواند مانع از این خواسته او شود؟ [۳ امتیاز]

(۳) یک زاویه در صفحه کشیده شده است. فقط می‌توان از پرگار استفاده کرد.  
الف) شخصی باید بداند که آیا زاویه حاده است یا خیر. حداقل تعداد دایره‌هایی را بیاورد که باید رسم شود تا او مطمئن گردد. [۲ امتیاز]  
ب) چگونه می‌توان تعیین کرد که آیا زاویه داده شده برابر  $31^\circ$  است (تعداد دایره‌های رسم شده می‌تواند به تعداد دل‌خواه زیاد باشد)؟ [۲ امتیاز]

(۴) در مسابقه ریاضی هر یک از شرکت کنندگان حداقل سه دوست در میان بقیه دارد. ثابت کنید که هیئت داوران می‌تواند تعداد زوجی از شرکت کنندگان (بیش از دو نفر) را انتخاب کند و آن‌ها را به گونه‌ای دور یک میز بنشانند که در دو طرف هر فرد، دو دوستش نشسته باشند؟ [۵ امتیاز]

(۵)  $101$  عدد صحیح روی تخته سیاه نوشته شده است:  $101^2, \dots, 2^2, 1^2$ . شخصی در هر گام، دو عدد صحیح را پاک می‌کند و قدرمطلق تفاضل آن دو را می‌نویسد. کوچک‌ترین عددی که بعد از  $100$  گام ممکن است ظاهر شود چیست؟ [۵ امتیاز]



*(The result is computed from the three problems with the highest scores.)*

points    problems

- 3    1. Six baskets contain pears, plums and apples. The number of plums in each basket equals the number of apples in the other baskets altogether, and the number of apples in each basket equals the number of pears in the other baskets altogether. Prove that the total number of fruits is a multiple of 31.
- 3    2. Karlsson and Lillebror are dividing a cake having the form of a square. Karlsson chooses a point of the cake (not on its boundary). After that, Lillebror makes a rectilinear section from this point up to the boundary (in any direction). Then Karlsson makes a second rectilinear section from the chosen point up to the boundary, perpendicular to the first one. The smaller of two resulting pieces is given to Lillebror. Lillebror wishes to get at least a quarter of the cake. Can Karlsson prevent him from this?
- 2    3. In the plane, an angle is drawn. One may use a compass only.
  - 2    a) One must find out if the angle is acute or not. Find the minimal number of circles one must draw to be sure.
  - 2    b) How can one determine whether the given angle is equal to  $31^\circ$  (the number of circles drawn may be arbitrarily great)?
- 5    4. At the math competition each participant has at least 3 pals among the others. Prove that Jury can choose an even number of participants (more than two) and place them around a table so that each one will have two pals for his/her neighbours?
- 5    5. 101 integers are written on a blackboard:  $1^2, 2^2, \dots, 101^2$ . At each step one removes any two integers and records the absolute value of their difference instead. What is the smallest integer that can appear in 100 steps?