

# مسائل جالب ریاضی و نقش آنها در یادگیری ریاضیات

مجید میرزاویری

## چکیده

بی‌تردید آنچه باعث می‌شود تا آموخته‌های ریاضی ما به شکلی فراموش نشدنی در ذهن حک گردد، جلوه‌ای است که از یادگیری حقایق ریاضی در حل مسائل مربوط به آن نمود می‌یابد. از این رو شاید بتوان این گونه مسائل را به نوعی «جالب» تلقی کرد. شاید این یک تعریف دقیق ریاضی به شکلی جامع و مانع نباشد اما درک شهودی ما از این تعریف برای مسائل جالب نشان می‌دهد تأثیرگذاری آنها راز ماندگاری این گونه مسائل بوده است. در این نوشته کوتاه به معرفی چند نمونه از این مسائل پرداخته و نقش آنها را در یادگیری بخشی از منطق مورد بحث قرار می‌دهیم.

## ۱ مسائل جالب

کدام یک از مسائل ریاضی را می‌توان جالب تلقی کرد؟ شاید یک پاسخ ساده برای این پرسش این باشد: مسائلی در ریاضیات وجود دارند که حکم مطرح شده در آنها چیزی بیشتر از یک مسأله، و در حقیقت نمونه‌ای از یک قضیه، تلقی می‌گردد. اینها را می‌توان جالب دانست. شاید مسائلی که خلاقیتی در حل آنها وجود دارد را بتوان در این دسته قرار داد. حتی ممکن است برخی معتقد باشند که یک مسأله جالب ریاضی، چیزی است که بیننده را شگفت‌زده کند یا به شکلی غیرقابل انتظار جلوه کند. همه این مشخص‌سازی‌ها درست است و چون «جالب بودن» امری سلیقه‌ای است نمی‌توان تعریفی جامع و مانع ارائه داد یا حکمی قطعی در این مورد صادر کرد. با این حال منظور ما از «مسأله جالب» در این نوشته، هیچ کدام از این موارد نیست.

اگر معلم باشید این تجربه را داشته‌اید که گاهی اوقات تأثیری که یک *نامثال* یا حکمی غلط در امر آموزش دارد می‌تواند بسیار عمیق‌تر از بیان حکمی دقیق باشد. این چیزی شبیه آموختن ادب از بی‌ادبان است! گاه یک معلم انتظار دارد شاگردش اشتباهی را مرتکب شود تا فرصت تأکید بر اجتناب از ترفندی غلط به وجود آید. مسائلی در ریاضیات وجود دارد که زمینه را برای این نوع آموزش فراهم می‌آورد. منظور ما از «مسأله جالب» چنین مسأله‌ای است.

## ۲ یک درس کوتاه در منطق

اجازه دهید برای نمونه، مسأله‌ای را مطرح کنیم که در آموزش بخشی از منطق می‌تواند بسیار مفید باشد. به عنوان یک حکم ساده در منطق می‌دانیم که سور عمومی در ترکیب فصلی پخش نمی‌شود اما فاکتور گرفته می‌شود. به عبارت دیگر گرچه

$$(\forall x \ P(x) \vee \forall x \ Q(x)) \Rightarrow \forall x \ (P(x) \vee Q(x))$$

درست است اما عکس این مطلب لزوماً درست نیست. یعنی در حالت کلی گزاره

$$\forall x \ (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x \ P(x) \vee \forall x \ Q(x))$$

درست نیست. بیان این حکم در کلاس چقدر برای شاگرد ما قابل فهم است؟ و آیا اصولاً وی می‌تواند اهمیت پنهان در این حقیقت را دریابد؟ قبل از بیان این حقیقت می‌توان با یک مثال ساده شکلی شهودی به عبارت صوری فوق داد که درک مسأله برای شاگرد را ساده‌تر کند. مثال زیر را ببینید.

می‌توان گفت هر انسانی زن است یا مرد است اما آیا درست است که از این حقیقت نتیجه بگیریم که همه انسان‌ها زن هستند یا همه انسان‌ها مردند؟

می‌توان گفت هر عدد طبیعی زوج است یا فرد است اما آیا درست است که از این حقیقت نتیجه بگیریم که همه عددهای طبیعی زوج هستند یا همه عددهای طبیعی فردند؟

اکنون یک «مسأله جالب» وجود دارد که باعث می‌گردد اهمیت حکم فوق مشخص شود و در ذهن حکم گردد. این مسأله از آن جهت جالب است که حکمی غلط را گوشزد می‌کند.

**حکم غلط.** هر تابع یک به یک، اکیداً یکنواست.

**برهان غلط.** فرض کنیم  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی یک به یک باشد،  $x, y \in [a, b]$  و  $x < y$  بنابراین

$$f(x) < f(y) \vee f(x) = f(y) \vee f(x) > f(y).$$

اما  $f(x) = f(y)$  نمی‌تواند درست باشد چون  $f$  یک به یک است. پس یکی از دو حالت دیگر اتفاق می‌افتد که در حالت اول  $f$  اکیداً صعودی و در حالت دیگر اکیداً نزولی است. اشتباه این استدلال در اینجاست که از

$$\forall x, y \ (f(x) < f(y) \vee f(x) > f(y))$$

نمی‌توان نتیجه گرفت که

$$\forall x, y \ f(x) < f(y) \vee \forall x, y \ f(x) > f(y).$$

آیا نمونه‌های دیگری از مسائلی که به این شکل جالب باشد سراغ دارید؟ تردید نکنید که در آموختن هر مبحثی از ریاضیات همیشه مسأله‌ای جالب وجود دارد که درک آن را برای شاگردمان آسان‌تر می‌کند. اما این همه توانایی این گونه مسائل نیست. حتی وقتی خودمان هم در بی‌یادگیری موضوعی جدید هستیم باید قبل از هر چیز سعی کنیم مسائل جالب مرتبط با آن موضوع را بیابیم.