

۱. یک تصاعد حسابی متناهی فقط شامل اعداد صحیح است و مجموع جملات آن توانی از عدد ۲ می باشد. ثابت کنید که تعداد جملات آن نیز توانی از عدد ۲ است. (۴ امتیاز)
۲. ماکسیم تعداد مهره های شطرنج در یک صفحه شطرنج  $8 \times 8$  را بیابید، به طوری که هر مهره را بتوان گرفت (یک مهره را می توان گرفت، هر گاه این مهره بر روی دومین مربع صفحه شطرنج از ۳ مربع متوالی قطری  $X, Y, Z$  باشد، به طوری که بر روی مربع  $X$ ، مهره دیگری قرار داشته و مربع  $Z$  خالی باشد). (۵ امتیاز)
۳. هر روز سهام یک شرکت خاص در بورس سهام  $n$  درصد افزایش یا کاهش می یابد. عدد  $n$  صحیح است و  $0 < n < 100$ . (قیمت با دقتی نا محدود محاسبه می شود) آیا یک عدد  $n$  وجود دارد که قیمت بتواند یک مقدار را دوبار تکرار کند؟ (۵ امتیاز)
۴. دو دایره یک دیگر را در  $A$  و  $B$  قطع می کنند مماس مشترک آن دو (آن که به  $B$  نزدیک تر است) در نقاط  $E$  و  $F$  بر دایره ها مماس است. خط  $AB$  خط  $EF$  را در نقطه  $M$  قطع می کند. نقطه  $K$  در امتداد  $MA$ ، آن سوی  $M$  چنان انتخاب می شود که  $KM = AM$ . خط  $KE$  بار دیگر دایره ای را که نقطه  $E$  بر آن قرار دارد در نقطه  $C$  قطع می کند. خط  $KF$  دایره ای را که نقطه  $F$  بر آن قرار دارد، بار دیگر در  $D$  قطع می کند. ثابت کنید که نقاط  $A$  و  $C$  و  $D$  در یک امتداد هستند.
۵. یک میز بیلیارد به شکل یک چند ضلعی است (که لزوماً محدب نیست). هر دو ضلع مجاور این چند ضلعی بر هم عموداند. در هر راس سوراخ کیسه ای قرار گرفته که توپ های کوچک بیلیارد می تواند در آن بیافتد. یک توپ از راس  $A$ ، با زاویه داخلی  $90^\circ$  در داخل میز بیلیارد به حرکت درمی آید و با توجه به قانون "زاویه برخورد با زاویه بازگشت برابر است" به اضلاع برخورد می کند. ثابت کنید که این توپ هیچگاه به  $A$  بر نمی گردد. (۶ امتیاز)
۶. در ابتدا عدد  $2004 \times 2004 = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2004$  بر روی تخته سیاه نوشته می شود. دو بازیکن حرکت های خود را یکی پس از دیگری به شرح زیر انجام می دهند. در هر حرکت، بازیکنی که نوبت اوست یک عدد طبیعی را که بر بیش از بیست عدد اول نوشته شده روی تخته بخش پذیر نباشد، از عدد نوشته شده کم می کند (به طوری که تفاضل نامنفی باشد). حال عدد جدید بر روی تخته نوشته و عدد قبلی را پاک می کند و این حرکت توسط بازیکن بعدی ادامه می یابد. بازیکنی برنده است که عدد صفر را به دست آورد. کدام یک از بازیکن ها می تواند به برنده بودن خود اطمینان داشته باشد و چگونه؟ (بازیکنی که حرکت اول را انجام می دهد یا بازیکنی که حرکت دوم را انجام می دهد). (۷ امتیاز)