

۱- در مثلث ABC زاویه $A = 60^\circ$ عمود منصف ضلع AB ضلع AC را در نقطه N قطع می کند. عمود منصف ضلع AC نیز ضلع AB را در نقطه M قطع می کنند. ثابت کنید $CB = MN$ (۳ نمره)

۲- یک جدول $n \times n$ در نظر بگیرید. که در هر یک از خانه های ستون اول عدد ۱ نوشته شده است، در هر یک از خانه های ستون دوم عدد ۲ نوشته شده است. و به همین ترتیب. اعداد خانه هایی که روی قطری که از گوشه بالا - سمت چپ به گوشه پایین - سمت راست است را پاک می کنیم. ثابت کنید مجموع اعداد همه خانه های بالای قطر پاک شده دو برابر مجموع اعداد همه خانه های پایین این قطر است. (۳ نمره)

۳- عدد دلخواه $a > 0$ را به گونه ای در نظر بگیرید که نامساوی $1 < xa < 2$ دارای دقیقاً ۳ جواب صحیح باشد. نامساوی $2 < xa < 3$ چند جواب صحیح ممکن است داشته باشد؟ تمام حالات ممکن را بیابید. (۴ نمره)

۴- سه کودک - آزاده، بهاره و ونوس - دور یک میز نشسته اند. بازی به این ترتیب انجام می شود که نفری که نوبت با اوست اگر تعداد بادام هایش زوج باشد او این بادام ها را بین دو نفر دیگر به طور مساوی تقسیم می کند. ولی اگر تعداد آنها فرد باشد او ابتدا یک بادام را می خورد و سپس باقی مانده بادام ها را به طور مساوی بین دو نفر دیگر تقسیم می کند. سپس کودک بعد (به ترتیب دور میز) عمل مشابهی را با بادام هایش انجام می دهد. یعنی در نوبتش در صورت لزوم یک بادام می خورد و بعد بادام هایش را بین دو نفر دیگر به صورت مساوی تقسیم می کند. اگر بازی از آزاده شروع شود و همه بادامها که بیش از سه تا است نزد او باشد (دو نفر دیگر بادامی نداشته باشند) ثابت کنید:

الف) حد اقل یک بادام خورده می شود (۳ نمره)

ب) بچه ها نمی توانند همه بادام ها را بخورند (۳ نمره)

۵- پویا n^3 مکعب $1 \times 1 \times 1$ سفید دارد. او می خواهد با استفاده از آنها یک مکعب $n \times n \times n$ بسازد. و علاقه دارد وجه های مکعب نهایی از بیرون کاملاً سفید باشد. حد اقل تعداد وجه هایی از کل مکعب های $1 \times 1 \times 1$ را تعیین کنید که اگر وحید آنها را سیاه کند بتواند مانع از هدف پویا شود؟

الف) $n = 2$ (۲ نمره)

ب) $n = 3$ (۴ نمره)