



لطفاً پیش از شروع، صفحه اول پاسخنامه را با دقت مطالعه کنید.
برای گروه‌هایی که هر سه نفر کلاس نهم و دهم هستند.

۱. پنج عدد غیر صفر وجود دارد. مجموع و حاصلضرب هر جفت از این اعداد را محاسبه می‌کنیم. معلوم شده که پنج تا از جمع‌ها مثبت و پنج تای دیگر منفی است. تعداد حاصلضرب‌های مثبت و منفی را پیدا کنید. [۳ امتیاز]
۲. آیا ۹۹ عدد طبیعی متوالی وجود دارد بطوری که کوچکترین آنها مضرب ۱۰۰، بعدی مضرب ۹۹، سومی مضرب ۹۸، ... و آخری مضرب ۲ باشد؟ [۴ امتیاز]
۳. تعداد یکصد سکه با ظاهر یکسان در یک ردیف قرار دارند. در بین آنها ۲۶ سکه تقلبی وجود دارد که پشت سرهم هستند. وزن همه سکه‌های اصلی یکسان است و وزن هر سکه تقلبی از وزن هر سکه اصلی کمتر است (وزن سکه‌های تقلبی لزوماً برابر نیست). با تنها یک بار استفاده از یک ترازوی دوکفه‌ای، حداقل یک سکه تقلبی را پیدا کنید. [۴ امتیاز]
۴. یک گنج در یکی از خانه‌های یک مربع 8×8 مدفون شده است. شما با کمک یک دستگاه فلزیاب از یکی از خانه‌های گوشه‌ها شروع کرده و هر بار می‌توانید به یک خانه مجاور (با ضلع مشترک) حرکت کنید. اگر شما روی خانه حاوی گنج یا خانه‌ای مجاور با آن خانه ایستاده باشید، دستگاه بوق می‌زند. آیا می‌توان با حداکثر ۲۶ حرکت خانه حاوی گنج را پیدا کرد؟ [۵ امتیاز]
۵. یک دایره به شعاع یک روی یک صفحه شطرنج کشیده شده است بطوری که یک خانه سفید را بطور کامل شامل می‌شود (طول ضلع خانه‌ها برابر یک است). ثابت کنید مجموع طول بخش‌هایی از محیط دایره که از خانه‌های سفید عبور می‌کند حداکثر یک سوم کل محیط دایره است. [۵ امتیاز]



(The result is computed from the three problems with the highest scores.)
Grades 8 – 9 (ages 13-15)

points problems

- 3 1. There are five nonzero numbers. For each pair of the numbers, their sum and product have been computed. It turned out that five of the sums are positive and the other five are negative. Find the number of positive and negative products.
- 4 2. Do there exist 99 consecutive natural numbers such that the smallest one is divisible by 100, the next by 99, the third by 98, ..., and the last one by 2?
- 4 3. One hundred coins, identical in appearance, lie in a row. Among them are exactly 26 fake coins, which lie consecutively. The weights of all true coins are the same while each fake coin is lighter than a true one (fake coins do not have necessarily equal weights). Find at least one fake coin with a single use of a two-cup scale.
- 5 4. A treasure is buried in one of the cells of an 8×8 square. You start with a metal detector in one of the corner cells, and can move to cells, which are adjacent by side. The metal detector beeps if you are standing on the cell with the treasure or on a cell adjacent to it by side. Is it possible to identify the cell with the treasure by making no more than 26 moves?
- 5 5. A circle of radius 1 is drawn on a chessboard so that it contains an entire white cell (the sides of the cells are equal to 1). Prove that the parts of the circumference passing through white cells have total length at most $1/3$ of the total length of the circumference.



لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخنامه را با دقت مطالعه کنید.
برای گروه‌هایی که حداقل یک نفر کلاس یازدهم و دوازدهم هستند.

۱. آیا اعداد غیر صحیح x و y وجود دارند بطوری که $\{x\} \cdot \{y\} = \{x + y\}$ (منظور از $\{x\}$ بخش اعشاری x است.)

[۴ امتیاز]

۲. فرض کنید CL یک نیمساز مثلث ABC باشد. عمود منصف ضلع AC پاره خط CL را در نقطه K قطع می‌کند. ثابت کنید دایره‌های محیطی مثلث‌های ABC و AKL مماس اند.

[۴ امتیاز]

۳. ۲۱ عدد غیر صفر وجود دارد. مجموع و حاصلضرب هر جفت از این اعداد را حساب کرده ایم. معلوم شده است که نصف مجموع‌ها مثبت و نصف دیگر منفی است. ماکسیمم تعداد حاصلضرب‌های مثبت چند تا است؟

[۴ امتیاز]

۴. (a) آیا ممکن است که یک کره با شعاع دلخواه وجوه یک چهاروجهی منظم را در دایره‌هایی به شعاع ۱ و ۲ و ۳ و ۴ قطع کند؟

[۳ امتیاز]

(b) همین سوال را برای یک کره به شعاع ۵ جواب دهید.

[۳ امتیاز]

۵. در خانه گوشه پایین و سمت چپ یک جدول 100×100 یک مهره قرار دارد. در هر حرکت مهره را به یک خانه مجاور می‌بریم، حرکات یکی در میان افقی و عمودی است و از حرکت افقی شروع می‌شود. با این حرکات مهره ابتدا به خانه گوشه بالا و چپ و سپس به خانه گوشه بالا و راست می‌رسد. ثابت کنید دو خانه مجاور (با ضلع مشترک) مثل a و b وجود دارند که مهره حداقل دو بار از خانه a به خانه b می‌رود.

[۵ امتیاز]



The result is computed from the three problems with the highest scores.
Grades 10 – 11 (ages 15 and older).

points problems

- 4 1. Do there exist non-integer numbers x and y such that $\{x\} \cdot \{y\} = \{x + y\}$?
(Here $\{x\}$ is the fractional part of x .)
- 4 2. Let CL be a bisector of triangle ABC . The perpendicular at the midpoint to side AC intersects the interval CL at point K . Prove that the circumscribed circles of the triangles ABC and AKL are tangent.
- 4 3. There are 21 non-zero numbers. For each pair of the numbers, their sum and product have been computed. It turned out that half of all the sums are positive and the other half are negative. What is the maximum possible number of positive products?
- 2 4. a) Is it possible for some sphere to intersect the faces of a regular tetrahedron along circles of radius 1, 2, 3 and 4?
3 b) Same question for a sphere of radius 5.
- 5 5. In the bottom left corner of a 100×100 chessboard there is a checker. Alternating horizontal and vertical moves (every move is to an adjacent square; the first move is horizontal), it first reached the top left corner, and then the top right corner. Prove that there are two adjacent (by side) squares a and b such that the checker moved from a to b at least twice.