

۱. هر روز سهام یک شرکت خاص در بورس سهام  $n$  درصد افزایش یا کاهش می یابد. عدد  $n$  صحیح است و  $0 < n < 100$ . (قیمت با دقتی نا محدود محاسبه می شود) آیا یک عدد  $n$  وجود دارد که قیمت بتواند یک مقدار را دوبار تکرار کند؟ (۴ نمره)

۲. یک میز بیلیارد به شکل یک چند ضلعی است (که لزوماً محدب نیست). اندازه هر زاویه این چند ضلعی بر حسب درجه یک عدد صحیح است. در هر راس سوراخ کیسه داری قرار گرفته که توپ های ریز بیلیارد می توانند در آن بیافتند. یک توپ از راس  $A$ ، با زاویه داخلی  $1$  درجه در داخل میز بیلیارد به حرکت در آمده و با توجه به قانون "زاویه برخورد با زاویه بازگشت برابر است" به اضلاع برخورد می کند. نشان دهید که این توپ هیچگاه به  $A$  بر نمی گردد. (۶ امتیاز)

۳. تصویر عمودی یک هرم مثلث القاعده بر روی یک صفحه بیشترین مساحت ممکن را دارد. ثابت کنید که این صفحه موازی یکی از وجوه هرم است یا موازی دو یال متناظر هرم است. (۶ امتیاز)

۴. در ابتدا عدد  $2004 * 2004 * \dots * 2004 = 1 * 2 * 3 * \dots * 2004$  بر روی تخته سیاه نوشته می شود. دو بازیکن حرکت های خود را یکی پس از دیگری به شرح زیر انجام می دهند. در هر حرکت، بازیکنی که نوبت اوست یک عدد طبیعی را که بر بیش از بیست عدد اول نوشته شده روی تخته پخش پذیر نباشد، از عدد نوشته شده کم می کند (به طوری که نفاضل نا منفی باشد). حال عدد جدید بر روی تخته نوشته و عدد قبلی را پاک می کند و این حرکت توسط بازیکن بعدی ادامه می یابد. بازیکنی برنده است که عدد صفر را به دست آورد. کدام یک از بازیکن ها می تواند به برنده

بودن خود اطمینان داشته باشد و چگونه؟ (بازیکنی که حرکت اول را انجام می دهد یا بازیکنی که حرکت دوم را انجام می دهد). (۷ امتیاز)

۵. در صفحه سهمی  $y=x^2$  و دایره ای که با آن در دو نقطه A و B مشترک است مفروضند. می دانیم که مماس های برسهمی و دایره در نقطه A بر هم منطبق اند. آیا مماس های در نقطه B نیز بر هم منطبق هستند؟ (۷ امتیاز)

۶. به شعبده بازی ۳۶ کارت به شرح زیر که روی آنها بر زمین است داده شده است. او باید رنگ آنها را با نگاه کردن به پشت کارتها پیش بینی کند.

۹ کارت به شماره های ۱ تا ۹ به رنگ قرمز

– ۹ کارت به شماره های ۱ تا ۹ به رنگ آبی

– ۹ کارت به شماره های ۱ تا ۹ به رنگ سبز

– ۹ کارت به شماره های ۱ تا ۹ به رنگ زرد

شعبده باز بعد از اینکه رنگ روی اولین کارت را پیش بینی کرد، رنگ آن را می بیند و کارت را کنار می گذارد. سپس رنگ روی کارت بعد را پیش بینی می کند و به همین ترتیب ادامه می دهد. هدف شعبده باز پیش بینی درست هر چه بیشتر کارت هاست.

در واقع پشت کارتها مشابه نیستند و قبل از انجام پیش بینی ها، شعبده باز پشت کارت را می تواند ببیند. کارتها توسط همدست شعبده باز بر می خورد و بدون تغییر جای کارتها نشانه هایی را که قبلا با شعبده باز هماهنگ کرده بر پشت کارت ها حک می کند. با استفاده از این روش نشانه گذاری، آیا وی می تواند رنگ:

الف) بیش از نصف کارتها، (۳ امتیاز)

ب) بیست کارت یا بیشتر را (۵ امتیاز)

درست پیش بینی کند