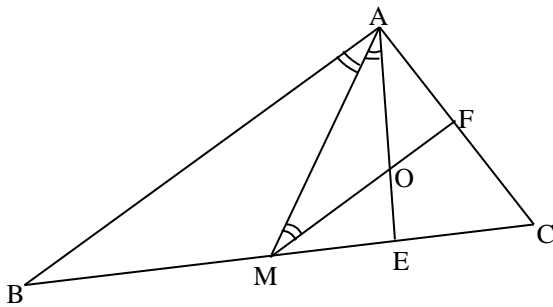


سوال ۱: در مثلث ABC ضلع BC دو برابر ضلع AC است. میانه AM را رسم کرده، میانه‌های AE و MF از مثلث AMC یکدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند.

ثابت کنید مثلث AOM متساوی‌الساقین است. (۱ امتیاز)
ثابت کنید AM نیمساز زاویه $\angle BAE$ است. (۱ امتیاز)



سوال ۲:

الف - ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی مثبت $a > 0$ داریم: $a + \frac{1}{a} \geq 2$ (۱ امتیاز)
ب - ثابت کنید اگر x, y, z اعداد حقیقی مثبت باشند داریم:

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$$

(۲ امتیاز)

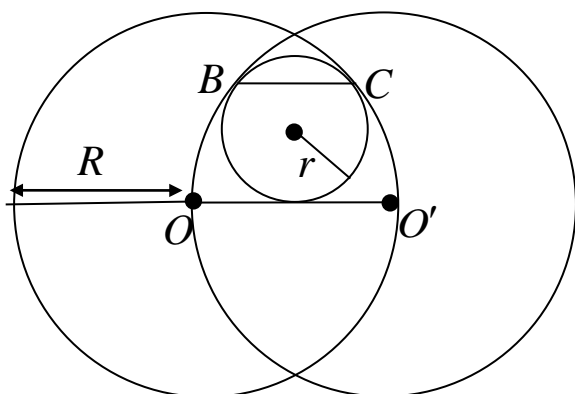
سوال ۳: امید قصد دارد خود و دوستانش را به گروه‌هایی جهت یک سری مسابقات تقسیم کند. اما:

۱. امید، علی و سعید همگی در زمینه زبان انگلیسی قوی هستند،
۲. علی، محمد و سامان در ریاضیات،
۳. امید، محمد و رامین در اجتماعی،
۴. داوود، رامین و سامان در فیزیک،
۵. داوود، سعید و محمد در زیست‌شناسی.

تعیین کنید کم‌ترین تعداد گروه‌هایی که این افراد را می‌توان به آنها تقسیم کرد و در آنها افرادی با زمینه قوت مشابه وجود نداشته باشد. (تعداد اعضای یک گروه می‌تواند یک نفر نیز باشد)

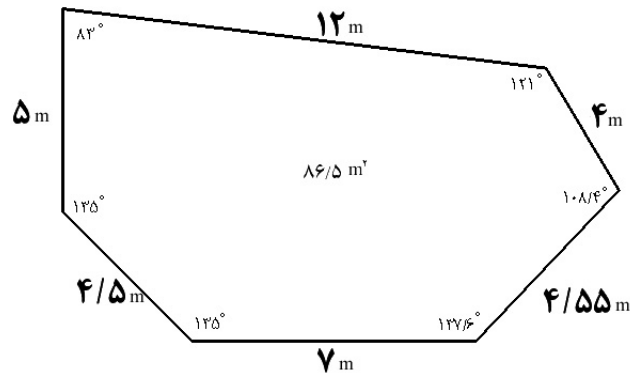
(۵ امتیاز)

سوال ۴: دو دایره مساوی به شعاع R از مرکز یکدیگر گذشته‌اند. دایره‌ای مماس بر خط‌المرکزین این دو دایره و دو دایره رسم شده است. اگر شعاع این دایره را r فرض کنیم و نقاط تماس این دایره را با دو دایره اول B و C بنامیم، طول BC را بر حسب R و r بیابید.

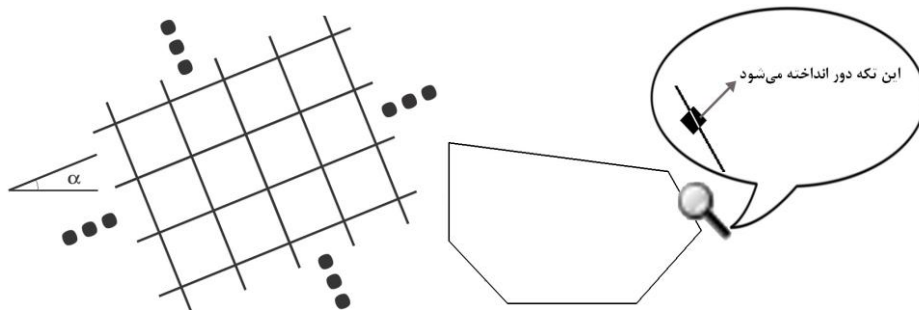


(۶ امتیاز)

سوال ۵: قرار است کف سالنی به مساحت $۶۸/۵$ متر مربع و به شکل زیر موزاییک شود:



موزاییک‌های مورد استفاده، مربع شکل و با طول ۲۵ سانتی‌متر است. اگر برای پر کردن قسمتی از سالن نیاز به بریدن یک موزاییک باشد، مابقی آن موزاییک دور انداخته می‌شود و در سایر قسمت‌ها از قطعات به‌جا مانده از برشهای موزاییک استفاده نمی‌شود و در صورت لزوم موزاییک دیگری بریده می‌شود. (شکل سمت راست زیر را ببینید.)



با شرایط فوق مسئول خرید موزاییک‌ها ادعا کرده است که:

الف) هر قدر هم که موزاییک کار وارد باشد حداقل ۱۳۸۵ موزاییک لازم است. (۲ امتیاز)

ب) اگر موزاییک کاری در راستای دلخواه و به صورت شبکه منظم انجام شود (شکل سمت چپ بالا را

ببینید)، ۱۶۰۰ موزاییک برای موزاییک کاری سالن مورد نظر کافی است. (۴ امتیاز)

هر یک از ادعاهای مسئول خرید موزاییک‌ها را اثبات کنید.