شماره گروه:

۱A

International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper
Spring 2016

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح پیشرفته ۱)
اسفند ۱۳۹۴

(لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخ‌نامه را با دقت مطالعه کنید.)

۱. همه اعداد صحیح از ۱ تا یک میلیون روی یک نوار با یک ترتیب دلخواه نوشته شده است. سپس نوار به تکه‌هایی بریده می‌شود که هر تکه شامل دو رقم متوالی است. ثابت کنید این تکه‌ها، صرف نظر از ترتیب اولیه اعداد، قطعاً شامل همه اعداد دو رقمی هستند. [۴ امتیاز]

۲. آیا اعداد صحیح a و b وجود دارند به طوری که

الف) معادله $x^۲ + ax + b = ۰$ هیچ ریشه حقیقی ندارد و معادله $[x^۲] + ax + b = ۰$ حداقل یک ریشه حقیقی دارد؟ [۲ امتیاز]

ب) معادله $x^۲ + ۲ax + b = ۰$ هیچ ریشه حقیقی ندارد و معادله $[x^۲] + ۲ax + b = ۰$ حداقل یک ریشه حقیقی دارد؟ [۳ امتیاز]

(منظور از $[k]$ جزء صحیح عدد k یعنی بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی k است.)

۳. یک مربع با ضلع ۱۰ داده شده است. این مربع را به ۱۰۰ چهارضلعی هم‌نهشت ببرید بطوری که هر کدام از چهارضلعی‌ها در یک دایره به قطر $\sqrt{۳}$ محاط شود. [۶ امتیاز]

۴. یک طراح، یک مکعب چوبی $۵ \times ۵ \times ۵$ را گرفته و هر وجه آن را به مربع‌های واحد تقسیم کرده و هر مربع را به رنگ سیاه، سفید یا قرمز رنگ می‌کند به طوری که هر دو مربع با ضلع مشترک رنگ‌های متفاوتی دارند. کمترین تعداد ممکن مربع‌های سیاه چند است؟ (مربع‌ها با ضلع مشترک ممکن است متعلق به یک وجه مکعب یا دو وجه متفاوت باشند.) [۸ امتیاز]

۵. فرض کنید p یک عدد صحیح اول بزرگتر از ۱۰^k باشد. پویا یک مضرب p را می‌گیرد و یک عدد صحیح k-رقمی A را بین دو رقم مجاور آن وارد می‌کند. عدد حاصل C مجدداً یک مضرب p است. پویا یک عدد صحیح k-رقمی B را بین دو رقم مجاور C که متعلق به عدد وارد شده A هستند وارد می‌کند و مجدداً یک مضرب p بدست می‌آید. ثابت کنید عدد B را می‌توان از عدد A با یک جایگشت از ارقامش بدست آورد. (یعنی با جا به جا کردن ارقام عدد A می‌توان عدد B را بدست آورد.) [۸ امتیاز]

۶. یک تمیز کننده خودکار به شکل دایره از یک سطح صاف عبور می‌کند. برای هر نقطه از مرز دایره‌ای شکل آن، یک خط راست وجود دارد که این نقطه را در هر زمان شامل می‌شود. آیا الزاماً درست است که مرکز دایره در هر زمان روی یک خط راست باقی می‌ماند؟ [۹ امتیاز]

۷. الف) تعداد $۲n + ۱$ باتری ($n > ۲$) وجود دارد. نمی‌دانیم کدام باتری خوب و کدام بد است، اما می‌دانیم تعداد باتری‌های خوب یک واحد بیشتر از تعداد باتری‌های بد است. یک لامپ از دو باتری استفاده می‌کند و فقط در صورتی کار می‌کند که هر دو باتری خوب باشند. حداقل چندبار تلاش کافی است تا لامپ بطور قطعی کار کند؟ [۵ امتیاز]

ب) همین مساله را پاسخ دهید وقتی تعداد باتری‌ها $۲n$ ($n > ۲$) و تعداد باتری‌های خوب و بد برابر باشند. [۵ امتیاز]

شماره گروه:

International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper
Spring 2016

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح پیشرفته ۱)
اسفند ۱۳۹۴

خانه ریاضیات

(The result is computed from the three problems with the highest scores, the scores for the individual parts of a single problem are summed up.)

points problems

4 — 1. All integers from 1 to one million are written on a tape in some arbitrary order. Then the tape is cut into pieces containing two consecutive digits each. Prove that these pieces contain all two-digit integers for sure, regardless of the initial order of integers.

2. Do there exist integers a and b such that

2 — a) the equation $x^2 + ax + b = 0$ has no real roots, and the equation $[x^2] + ax + b = 0$ has at least one real root?

3 — b) the equation $x^2 + 2ax + b = 0$ has no real roots, and the equation $[x^2] + 2ax + b = 0$ has at least one real root?

(By $[k]$ we denote the integer part of k, that is, the greatest integer not exceeding k.)

6 — 3. Given a square with side 10. Cut it into 100 congruent quadrilaterals such that each of them is inscribed into a circle with diameter $\sqrt{3}$.

8 — 4. A designer took a wooden cube $5 \times 5 \times 5$, divided each face into unit squares and painted each square black, white or red so that any two squares with a common side have different colours. What is the least possible number of black squares? (Squares with a common side may belong to the same face of the cube or to two different faces.)

8 — 5. Let p be a prime integer greater than 10^k. Pete took some multiple of p and inserted a k-digit integer A between two of its neighbouring digits. The resulting integer C was again a multiple of p. Pete inserted a k-digit integer B between two of neighbouring digits of C belonging to the inserted integer A, and the result was again a multiple of p. Prove that the integer B can be obtained from the integer A by a permutation of its digits.

9 — 6. An automatic cleaner of the disc shape has passed along a plain floor. For each point of its circular boundary there exists a straight line that has contained this point all the time. Is it necessarily true that the center of the disc stayed on some straight line all the time?

7.

5 — a) There are $2n+1$ ($n > 2$) batteries. We don't know which batteries are good and which are bad but we know that the number of good batteries is greater by 1 than the number of bad ones. A lamp uses two batteries, and it works only if both batteries are good. What is the least number of attempts sufficient to make the lamp work for sure?

5 — b) The same problem but the total number of batteries is $2n$ ($n > 2$) and the numbers of good and bad batteries are equal.

۲A

International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper
Spring 2016

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح پیشرفته ۱)
اسفند ۱۳۹۴

(لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخ‌نامه را با دقت مطالعه کنید.)

۱. همه اعداد صحیح از ۱ تا یک میلیون روی یک نوار با یک ترتیب دلخواه نوشته شده است. سپس نوار به تکه‌هایی بریده می‌شود که هر تکه شامل دو رقم متوالی است. ثابت کنید این تکه‌ها، صرف نظر از ترتیب اولیه اعداد، قطعاً شامل همه اعداد دو رقمی هستند. [۴ امتیاز]

۲. یک مربع با ضلع ۱۰ داده شده است. این مربع را به ۱۰۰ چهارضلعی هم‌نهشت ببرید بطوری که هر کدام از چهارضلعی‌ها در یک دایره به قطر $\sqrt{۳}$ محاط شود. [۵ امتیاز]

۳. فرض کنید M وسط ضلع AC از یک مثلث متساوی الساقین ABC باشد ($AB = BC$). نقاط E و F به ترتیب روی اضلاع AB و BC انتخاب شده‌اند به‌طوری که $AE \neq CF$ و $\angle FMC = \angle MEF = \alpha$. مقدار $\angle AEM$ را تعیین کنید. [۶ امتیاز]

۴. ۶۴ شهر در یک کشور وجود دارد و برخی از جفت شهرها با جاده به هم متصل شده‌اند ولی ما نمی‌دانیم کدام جفت‌ها. ما می‌توانیم هر جفت از شهرها را انتخاب کرده و سوال کنیم آیا با جاده بهم وصل‌اند یا نه. هدف ما این است که بفهمیم آیا می‌توان با استفاده از جاده‌ها بین هر دو شهر سفر کرد. ثابت کنید هیچ الگوریتمی وجود ندارد که بتواند این کار را با کمتر از ۲۰۱۶ سوال انجام دهد. [۸ امتیاز]

۵. روی یک تخته‌سیاه تعدادی چندجمله‌ای از درجه ۳۷ نوشته شده است که در هر کدام ضریب بزرگترین درجه برابر یک است. در ابتدا همه ضرایب هر چندجمله‌ای نامنفی هستند. در هر حرکت می‌توانیم یک جفت چندجمله‌ای f و g را پاک کنیم و آن را با یک جفت چندجمله‌ای دیگر $f_۱$ و $g_۱$ از درجه ۳۷ با ضریب بزرگترین درجه یک جایگزین می‌کنیم، به‌طوری که یا $f_۱ + g_۱ = f + g$ یا $f_۱g_۱ = fg$. ثابت کنید غیرممکن است بعد از چندبار تکرار این حرکت، همه چندجمله‌ای‌های روی تخته‌سیاه ۳۷ ریشه مثبت متمایز داشته باشند. [۸ امتیاز]

۶. یک واروخوان کلمه‌ای است که وقتی مستقیم یا برعکس خوانده می‌شود، یکی است.
الف) نامتناهی کارت با کلمه‌های abc، bca و cab وجود دارد. یک کلمه با استفاده از این کارت‌ها به‌صورت زیر ساخته می‌شود. کلمه اول یک کارت دلخواه است. در هر گام یا یک کارت را (از چپ یا راست) به کلمه موجود می‌چسبانیم یا بین دو تا از حروف آن را می‌بریم و یک کارت بین دو بخش می‌چسبانیم تا یک کلمه جدید بدست آید. آیا می توان با این روش یک واروخوان درست کرد؟ [۴ امتیاز]
ب) تعداد نامتناهی کارت قرمز با کلمات abc، bca و cab و کارت آبی با کلمات cba، acb و bac وجود دارند. یک واروخوان از این کارت‌ها با روش توضیح داده شده در الف بدست آمده است. آیا لزوماً تعداد کارت‌های آبی و قرمز استفاده شده برابر است؟ [۶ امتیاز]

۷. یک سیاره کروی دارای طول استوای برابر با یک است. روی این سیاره قرار است N مسیر دوار به طول ۱ ساخته شود که هرکدام برای تعدادی قطار استفاده می‌شود. قطارها باید سرعت ثابت مثبت و یکسان داشته باشند و هرگز متوقف نمی‌شوند و باهم برخورد نمی‌کنند. بیشترین مجموع طول همه قطارها چقدر است؟ قطارها کمان‌هایی با عرض صفر هستند که نقاط انتهایی آن‌ها حذف شده‌اند (بنابراین اگر فقط نقاط انتهای دو کمان منطبق باشند برخورد اتفاق نیفتاده است). مساله را برای مقادیر زیر حل کنید.
الف) $N = ۳$. [۴ امتیاز]
ب) $N = ۴$. [۶ امتیاز]

شماره گروه:

International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper
Spring 2016

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح پیشرفته ۱)
اسفند ۱۳۹۴

(The result is computed from the three problems with the highest scores, the scores for the individual parts of a single problem are summed.)

points	problems	
4	1.	All integers from 1 to one million are written on a tape in some arbitrary order. Then the tape is cut into pieces containing two consecutive digits each. Prove that these pieces contain all two-digit integers for sure, regardless of the initial order of integers.
5	2.	Given a square with side 10. Cut it into 100 congruent quadrilaterals such that each of them is inscribed into a circle with diameter $\sqrt{3}$.
6	3.	Let M be the midpoint of the base AC of an isosceles triangle ABC. Points E and F on the sides AB and BC respectively are chosen so that $AE \neq CF$ and $\angle FMC = \angle MEF = \alpha$. Determine $\angle AEM$.
8	4.	There are 64 towns in a country, and some pairs of towns are connected by roads but we don't know these pairs. We may choose any pair of towns and find out whether they are connected by a road. Our aim is to determine whether it is possible to travel between any two towns using roads. Prove that there is no algorithm which would enable us to do this in less than 2016 questions.
8	5.	On a blackboard, several polynomials of degree 37 are written, each of them has the leading coefficient equal to 1. Initially all coefficients of each polynomial are non-negative. By one move it is allowed to erase any pair of polynomials f, g and replace it by another pair of polynomials f_1, g_1 of degree 37 with the leading coefficients equal to 1 such that either $f_1 + g_1 = f + g$ or $f_1 g_1 = fg$. Prove that it is impossible that after some move each polynomial on the blackboard has 37 distinct positive roots.
	6.	Recall that a palindrome is a word which is the same when we read it forward or backward.
4	a)	We have an infinite number of cards with words "*abc*", "*bca*", "*cab*". A word is made from them in the following way. The initial word is an arbitrary card. At each step we obtain a new word either gluing a card (from the right or from the left) to the existing word or making a cut between any two of its letters and gluing a card between both parts. Is it possible to obtain a palindrome this way?
6	b)	We have an infinite number of red cards with words "*abc*", "*bca*", "*cab*" and of blue cards with words "*cba*", "*acb*", "*bac*". A palindrome was formed from them in the same way as in part (a). Is it necessarily true that the number of red and blue cards used was equal?
	7.	A spherical planet has the equator of length 1. On this planet, N circular roads of length 1 each are to be built and used for several trains each. The trains must have the same constant positive speed and never stop or collide. What is the greatest possible sum of lengths of all the trains? The trains are arcs of zero width with endpoints removed (so that if only endpoints of two arcs have coincided then it is not a collision). Solve the problem for
4	a)	$N = 3$;
6	b)	$N = 4$.