

International Mathematics Tournament of Towns Junior A level paper Spring 2013



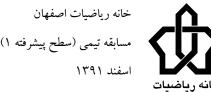
(لطفاً پیش از شروع، صفحه اول پاسخنامه را با دقت مطالعه کنید)

- ا) تعدادی عدد طبیعی روی تختهسیاهی نوشته شدهاند که مجموع هر دو تا از آنها توانی طبیعی از عدد دو است (برای مثال ۲،
 ۴، ۸، ...). حداکثر تعداد ممکن اعداد طبیعی متفاوتی که روی تختهسیاه نوشته شده چند تا است؟ [۴ امتیاز]
- ۲) بیست بچه، ده پسر و ده دختر، روی یک خط ایستادهاند. هر پسر تعداد بچههایی را که سمت راست او ایستادهاند می شمارد و
 هر دختر تعداد بچههایی را که در سمت چپ او ایستادهاند می شمارد. ثابت کنید مجموع اعداد شمرده شده توسط پسران با
 مجموع اعداد شمرده شده توسط دختران برابر است. [۴ امتیاز]
- ۳) آیا ممکن است برخی خانه های ۱×۱ از جدولی ۱۹×۱۹ نشانه گذاری شود، به طوری که هر مربع ۱۰×۱۰ دارای تعداد
 متفاوتی از خانه های نشانه گذاری شده باشد؟ [۵امتیاز]
- ۴) روی یک دایره ۱۰۰۰ عدد حقیقی غیرصفر یک در میان با سفید و سیاه رنگ آمیزی شدهاند. هر عدد سیاه برابر با مجموع دو عدد سفید همسایهی آن است. مجموع این هزار عدد عدد سفید همسایهی آن است. مجموع این هزار عدد چه اعدادی می تواند باشد؟ [۵ امتیاز]
- ۵) یک نقطه روی صفحه «گره» نامیده میشود اگر هر دو مولفهی مختصات آن عددی صحیح باشد. مثلثی با رأسهایی در گرهها در نظر بگیرید که دقیقاً دو گره درون آن واقع شده است. ثابت کنید خط راستی که این دو گره را به هم متصل می کند یا از یک رأس عبور می کند و یا موازی ضلعی از مثلث است. [۶ امتیاز]
- 9) در مثلث قائم الزاویهی ABC، نقطه ی I مرکز دایره محاطی و نقاط A و B به ترتیب نقاط تماس دایره محاطی با ساق های AC و BC است.
- عمودی که از A به A رسم می شود با عمودی که از B به B رسم می شود در نقطه ی A برخورد می کند. ثابت کنید خطوط C و A بر یکدیگر عمود هستند. [۸ امتیاز]
- n دو تیم A و B در یک تورنمنت دانش آموزی تنیس روی میز شرکت میکنند. تیم a از a دانش آموز و تیم a از a دانش آموز تشکیل شده که a بازی a دانش آموز تشکیل شده که a

فقط یک میز برای بازی وجود دارد و تورنمنت به این صورت برگزار می شود که دو دانش آموز از دو تیم مختلف شروع به بازی می کنند و سایر دانش آموزان یک صف تشکیل می دهند و منتظر می مانند تا نوبت بازی به آن ها برسد. بعد از هر بازی، نفر اول در صف جای گزین هم تیمی خودش کنار میز می شود و با بازیکن قبلی کنار میز بازی می کند، و بازیکن جای گزین شده به انتهای صف می رود. ثابت کنید که هر دو بازیکن از دو تیم مقابل هم، سرانجام با هم بازی خواهند کرد. [۹ امتیاز]



International Mathematics Tournament of Towns Junior A level paper Spring 2013





(The result is computed from the three problems with the highest scores.)

points problems

4

- 1. Several positive integers are written on a blackboard. The sum of any two of them is a positive integer power of two (for example, 2,4,8, ...). What is the maximal possible number of different integers on the blackboard?
- 2. Twenty children, ten boys and ten girls, were standing in a line. Each boy counted the number of children standing to the right of him. Each girl counted 4 the number of children standing to the left of her. Prove that the sums of numbers counted by the boys and the girls are the same.
- 3. There is a 19×19 board. Is it possible to mark some 1×1 squares so that each 5 of 10×10 squares contains different number of marked squares?
- 4. On a circle, there are 1000 nonzero real numbers painted black and white in turn. Each black number is equal to the sum of two white numbers adjacent to 5 it, and each white number is equal to the product of two black numbers adjacent to it. What are the possible values of the total sum of 1000 numbers?
- 5. A point in the plane is called a node if both its coordinates are integers. Consider a triangle with vertices at nodes containing exactly two nodes inside. 6 Prove that the straight line connecting these nodes either passes through a vertex or is parallel to a side of the triangle.
- 6. Let ABC be a right-angled triangle, I its incenter and B_0 , A_0 points of tangency of the incircle with the legs AC and BC respectively. 8 Let the perpendicular dropped to AI from A_0 and the perpendicular dropped to BI from B_0 meet at point P. Prove that the lines CP and AB are perpendicular.
- 7. Two teams A and B play a school ping pong tournament. The team A consists of m students, and the team B consists of n students where $m \neq n$. There is only one ping pong table to play and the tournament is organized as follows. Two students from different teams start to play while other players form a line waiting for their turn to play. After each game the first player in the 9 line replaces the member of the same team at the table and plays with the remaining player. The replaced player then goes to the end of the line. Prove that every two players from the opposite teams will eventually play against each other.