نظریه‌ی نمایش

سخنران: سیامک یاسمی[*]

«کدام نظریه‌ی نمایش مورد نظر شما است؟» شاید این طبیعی‌ترین پرسشی باشد که می‌بایست از کسی که می‌خواهد درباره‌ی نظریه‌ی نمایش صحبت کند، پرسیده شود و احتمالاً پاسخِ «به طور خاص هیچ‌کدام» در مورد یک سخنرانیِ عمومی پنجاه دقیقه‌ای اگر کاملاً دلسرد کننده نباشد، دست‌کم مشکوک به‌نظر می‌رسد. آیا هدفْ ارائه‌ی توده‌ای از کلی‌گویی‌های پراکنده است؟ پاسخی مفصل-و البته منفی-به پرسش اخیر، شرحی است از محتوای سخنرانی، اما پیش از آن بهتر است ببینیم چه چیزی انتخاب مطالب را برای یک سخنرانی عمومی درباره‌ی نظریه‌ی نمایش دشوار می‌کند، چرا که این بررسی در عین حال، تا حدی نشان دهنده‌ی گستردگی موضوعی است که به آن می‌پردازیم.

معمولاً نظریه‌ی نمایش به این صورت معرفی می‌شود که شاخه‌ای از ریاضیات است که در آن اشیاءِ مجرد (و کمتر شناخته شده) از طریق یافتن نمایش‌های ملموس مطالعه می‌شوند. به عنوان مثال، اگر بتوان به‌جای مطالعه‌ی مستقیم یک گروه مجرد با گروهی از ماتریس‌ها کار کرد، این امید هست که دانش بیشتری که از این اشیاءِ آشنا داریم به درک ما از ساختار و رفتار گروه مورد نظر کمک کند. چنین توصیفی از نظریه‌ی نمایش خالی از حقیقت نیست و بی‌تردید روشن‌گر هم هست. با وجود این، باید پذیرفت که به شایستگیْ معرّفِ یک شاخه‌ی مستقل از ریاضیات نیست. چرا که از هر چه بگذریم، تلاش برای تبدیل یک مسئله‌ی پیچیده، به مسئله‌ای کمتر پیچیده، کاری است که در سرتاسر ریاضیات انجام می‌دهیم. به عنوان دومین تلاش برای معرفیِ نظریه‌ی نمایش، می‌توان گفت در نظریه‌ی نمایش-یا بهتر بگوییم، در هر نظریه‌ی نمایش-روش‌های مختلفِ نمایاندن اشیائی خاص مطالعه می‌شوند. این توصیف کم و بیش بدریخت که تا حدی به همانگویی نیز شبیه است، حاوی نکته‌ای اساسی است: در اینجا، بر خلاف توصیف نخست، «نمایش» صرفاً ابزار مطالعه نیست، بلکه اساساً موضوع مطالعه است. اینکه چنین مطالعه‌ای چه فوایدی دارد موضوعی است که به آن خواهیم پرداخت، اما پیش از آن به مثالی که در بالا به آن اشاره شد باز می‌گردیم: یعنی نمایش یک گروه مجرد به وسیله‌ی گروهی

[*] با همکاری شهاب رجبی، پویان مرادی‌فر

از ماتریس‌ها. با در نظر داشتن توصیف اخیر، می‌توان گفت در نظریه‌ی نمایش گروه‌ها، طُرق مختلف نمایاندن یک گروه را به وسیله‌ی گروه‌هایی از ماتریس‌ها بررسی می‌کنیم. به سادگی می‌توان دید که این بررسی معادل است با مطالعه‌ی طرق مختلفی که یک گروه بر فضاهای برداری عمل می‌کند. از این دیدگاه تا گسترشِ انفجاریِ حیطه‌ای که نظریه‌ی نمایش می‌تواند در بر بگیرد، راه زیادی نیست. نخست اینکه، آنچنان که در ریاضیات قرن اخیر به وفور مشاهده می‌شود، آنچه یک گروه بر آن عمل می‌کند لزوماً یک فضای برداری نیست، بلکه می‌تواند یک خمینه‌ی هموار یا فضای مماس بر آن، یک گروه (کو)هومولوژی یا بسیاری از اشیاء ریاضی دیگر باشد. بنابراین، دست‌کم به طور بالقوه، هر انتخاب به‌جای «فضای برداری» منجر به یک نظریه‌ی نمایش می‌شود. از این گذشته، اینکه چه فضاهای برداری‌ای را در نظر بگیریم، تفاوت‌هایی اساسی در ماهیت و ابزارهای مطالعه به دنبال خواهد داشت. به عنوان مثال، فرض کنید توجه خود را به فضاهای برداری بی‌نهایت بُعدی روی میدان اعداد مختلط معطوف کنیم، که مجهز به ساختاری غنی مانند ساختار فضای هیلبرت هستند. در این حالت، پنداشتنی است — و در حقیقت، امر واقع است — که ابزارهای آنالیز تابعی به مطالعه‌ی گروه مورد نظر کمک می‌کنند. به همین ترتیب انتخاب‌های بسیاری به جای «گروه» (به معنای عام آن) داریم: گروه‌های متناهی، گروه‌های توپولوژیک، گروه‌های لی، جبرهای شرکت‌پذیر، جبرهای لی و ... هر انتخاب منجر به یک شاخه‌ی کم و بیش مستقل از ریاضی می‌شود که اگر چه همگی آن‌ها در چارچوب کلی نظریه نمایش قرار می‌گیرند، در جزئیات فنی چنان از یکدیگر فاصله می‌گیرند که ارائه‌ی بحثی فراگیر مقرون به صرفه به نظر نمی‌رسد. به این معنی که، کلیت از یک سو و ظرافت‌های موجود در نظریه‌های مختلف از سوی دیگر، در دو کفه‌ی ترازو قرار می‌گیرند که افزودن بر بارِ هر یک نقش دیگری را کمرنگ‌تر خواهد کرد.

به موضوع انتخاب مطالب برای سخنرانی بازگردیم: اگر بر گستردگی و تنوعی که در بالا تنها طعمی از آن را چشیدیم، لزوم پرداختن به مسائل، کاربردها و دست‌آوردهای امروزی را نیز بیافزاییم، آنگاه بدیهی است که باید در برابر وسوسه‌ی پرداختن به همه‌ی جنبه‌ها مقاومت کرد و در مقابل، می‌بایست در جهت دست یافتن به آمیزه‌ای موزون از گستره و ژرفا، دست به انتخاب زد. ناگفته پیدا است که در هر چنین گزینشی مطالب ارزشمند بسیاری قربانی خواهند شد و احتمالاً گزینشی نیست که نتوان چیزی به آن افزود. با این همه، کار را می‌بایست از جایی آغاز کرد و در جایی خاتمه داد. پس بگذارید تلاشی بکنیم، حتی اگر پیشاپیش بدانیم نتیجه بی‌نقص نخواهد بود.

آنچه در ادامه می‌آید شرحی است اجمالی از موضوعاتی که به آن‌ها خواهیم پرداخت. احتمالاً لازم به اعتراف نیست که معیارِ انتخاب مطالب نه صرفاً اهمیت آن‌ها، بلکه تلفیقی است از اهمّیت موضوعات با سلایق و علایق ما که محدودیت‌های آگاهی نیز بر آن بی‌تأثیر نبوده است.

معمولاً نظریه‌های ریاضی در یک بازه‌ی زمانی کم و بیش طولانی شکل می‌گیرند و بنابراین، به سختی می‌توان بی‌مناقشه تعیین کرد از چه هنگام آغاز شده‌اند. در این میان، نظریه‌ی نمایش یک استثنا است. به این معنی که، نه تنها می‌دانیم نظریه‌ی نمایش گروه‌های متناهی از نظر تاریخی بر سایر نظریه‌های نمایش مقدم است، بلکه اطلاع نسبتاً دقیقی از زمان و نحوه‌ی پیدایش آن داریم. بحث خود را با مروری سریع بر همین موضوع آغاز می‌کنیم که محور اصلی آن دستاوردهای گئورگ فروبنیوس[۱] و ویلیام برنساید[۲] در سال‌های پایانی قرن نوزدهم میلادی است. سال‌ها پیش از پیدایش این نظریه، سوفوس لی[۳] با الهام گرفتن از برنامه‌ی ارلانگن[۴]، مفهوم «گروه پیوسته‌ی متناهی» را معرفی کرده بود، مفهومی که امروز آن را تحت عنوان «گروه لی» می‌شناسیم. طی سالیان بعد، کارهای اساسی لی و دیگران (از جمله، الی کارتان[۵] و هرمان ویل[۶]) درباره‌ی گروه‌های پیوسته‌ی متناهی و جبرهای برخاسته از میدان‌های برداری روی آن‌ها (چیزی که امروز به «جبر لی» معروف است) منجر به پیدایش نظریه‌ی نمایش گروه‌های لی و نظریه‌ی نمایش جبرهای لی شد. از سوی دیگر، به ویژه پس از کشف چهارگان‌ها توسط ویلیام هامیلتون[۷]، مسئله‌ی رده‌بندی ساختاری جبرهای شرکت‌پذیر روی میدان‌های اعداد حقیقی و مختلط یکی از مسائل مهم به شمار می‌رفت. تا سال ۱۹۲۹ نظریه‌ی نمایش گروه‌ها و نظریه‌ی ساختاری جبرها دو موضوع مجزا تلقی می‌شدند. این بصیرت ستایش برانگیز امی نوتر[۸] بود که نشان داد این دو نظریه در حقیقت دو سیمای متفاوت از یک پدیده هستند. به این معنی که می‌توان این دو نظریه را در قالب مطالعه‌ی مدول‌ها بر حلقه‌هایی که در «شرایط تناهی زنجیری» — که امروز به آن‌ها شرط‌های «نوتری» و «آرتینی» می‌گوییم — صدق می‌کنند یکپارچه کرد. این نگرش از یک سو منجر به پیدایش نظریه‌ی کلی نمایش جبرهای شرکت‌پذیر روی میدان‌های دلخواه شد و از سوی دیگر مسیری را هموار کرد که طی سالیان بعد، از طریق آن گنجینه‌ای از روش‌ها و ابزارهای کارا به نظریه‌ی

[۱] Georg Frobenius
[۲] William Burnside
[۳] Sophus Lie
[۴] the Erlangen program
[۵] Élie Cartan
[۶] Hermann Weyl
[۷] William Hamilton
[۸] Emmy Noether

نمایش جبرها راه یافت. در توضیح این مطلب، با برداشتن یک گام نسبتاً بلند تاریخی، به کارهای بنیادین موریس آسلندر[9] می‌پردازیم که با وارد کردن روش‌های هومولوژیکی، و به طور کلی‌تر روش‌های مبتنی بر نظریه‌ی رسته‌ها، تحولی عظیم در نظریه‌ی نمایش جبرها ایجاد کرد. از جمله نخستین دستاوردهای این رویکرد، اثبات حدس اول برائر–تِرال[10] برای جبرهای آرتین بود که در سال ۱۹۷۴ توسط آسلندر ارائه شد. از آن زمان تا به امروز، بکارگیری روش‌های هومولوژیکی یکی از جریان‌های فعال و جذاب در نظریه‌ی نمایش جبرها بوده است. تحول دیگری که به آن می‌پردازیم ورود مفاهیم و روش‌های مبتنی بر رسته‌های مثلث‌بندی‌شده است که با پیشگامی دیتر هپل[11] به عرصه‌ی نظریه‌ی نمایش جبرها راه پیدا کردند. بحث خود را با شرح یکی از دستاوردهای اخیر این رویکرد در اثبات حدسی از آسلندر به پایان می‌بریم.

[9] Maurice Auslander
[10] the first Brauer-Thrall conjecture
[11] Dieter Happel