رياضي خانه‌هاي رياضيات (اتصال ماری)
نوشته: دکتر امیدعلی کرم‌زاده، استاد دانشگاه شهید چمران اهواز

اولين خانه‌ي رياضيات ايران در سال ۱۳۷۹ در اصفهان تأسيس شد تا تاريخچه، زيبايي،اهميت و كاربرد رياضيات را به دانش-آموزان جوان اين شهر تاريخي و فرهنگي بشناساند. خانه براي اين كار تلاش مي‌كند جوانان را با شاخه‌هاي مختلف رياضي،خارج از كلاس درس و از طريق مشاهدات و كارهاي گروهي چه با معلم‌هايشان چه ديگر دانش‌آموزان آشنا سازد. لازم است بدانيم كه حمايت‌هاي مالي اين خانه توسط شوراي شهر اصفهان صورت گرفته است. فعاليت‌هاي خانه‌ي رياضيات اصفهان در فضاي شاد و جذاب سايت:http://www.mathhouse.org/ گزارش مي‌شوند. همچنين پاور-پوينت همكار من علي رجالي از دانشگاه صنعتي اصفهان كه نقش كليدي در تأسيس اين خانه داشته است به اين آدرس موجود مي-باشد:

nms.lu.lv/mcg 10/2day-12/Ali Rejali.ppt

در طول ۱۳ سال بعد از بازگشايي اولين خانه‌ي رياضيات با توصيه و كمك رياضيدانان و با مسئوليت بومي، خانه‌هايي در تبريز، كرمان،زنجان و ديگر شهرستان‌ها ايجاد شد. اين خانه‌ها تحت حمايت شهرداري‌ها يا وزارت آموزش و پرورش و يا هردو بوده‌اند و در موارد نادري توسط بخش خصوصي حمايت مي‌شدند. شكّي نيست كه در اين مدت طولاني اين خانه‌ها تأثيري بر آموزش رياضي كشور داشته و علاقه‌ي دانش‌آموزان رابه رياضي افزايش داده‌اند. مدارس و دانشگاه‌هاي شهرهاي مختلف معمولاً درگير مسائل روزمره‌ي خود هستندو انتظار نمي‌رود كه بتوانند تأثير جدي بر آگاهي مردم داشته باشند، اما خانه‌هاي رياضي با همكاري انجمن رياضيات ايران نقش كليدي و طبيعي بر مردم داشته است تا رياضيات را بفهمند و ستايشش كنند.
(براي جزئيات بيشتر راجع به خانه هاي رياضي [٤] و [١] را ببينيد).

دانش آموزان و معلم شان در خانه‌ي رياضی اصفهان

دانش آموزان با معلمشان در یک ساختمان قدیمی اصفهان نقش هندسه در معماری این بناهای تاریخی را بررسی می‌کنند
(کارگاه ریاضی و هنر توسط خانه‌ی ریاضی اصفهان ۸۷)

يكي از فعاليت‌هاي مهم خانه‌ي رياضيات اصفهان، كه خانه‌هاي ديگري هم به تبعيت از آن همين فعاليت‌ها را انجام دادند، اين است كه از محققان برجسته‌ي داخل و خارج كشور براي سخنراني دعوت مي‌كند تا براي مخاطبان عامي، معلمان، دانش‌آموزان و حتي مردم عادي از رياضيات بگويند و اين فرصتي براي دانش آموزان جوان كه مشتاقند رياضيدانان معروف را از نزديك ببينند ايجاد مي‌كند. بعضی از مدعوین خارجی خانه تاکنون: Y. Dodge (دانشگاه Neuchatel سویس) درباره عدد پی و مولدهای اعداد تصادفی، S. Gazor (دانشگاه Queen کانادا) درباره سایکو اکوستیک، سلامتیان (پاریس، فرانسه) در مورد Internet Measurement، عنایت (American University آمریکا) درباره‌ی هدیه‌ای از بهشت کانتور، Vaananen (دانشگاه Helsinki فنلاند) در مورد منطق و ریاضی، Andler (دانشگاه Versailles Saint Quantin and Animath فرانسه) درباره مشکلات حال حاضر آموزش ریاضی فرانسه، Frey (دانشگاه Duisburg Essen آلمان) درباره‌ی نظریه اعداد و کدگذاری، Deshouillors (دانشگاه Bordeaux، فرانسه) درباره‌ی اعداد اول، دیروز و امروز 88، Goris (دانشگاه Utrecht هلند) درباره آموزش مدل ریاضی، صابری (دانشگاه Stanford آمریکا) درباره‌ی مدل اینترنتی ریاضی، Berggern (دانشگاه Simon Fraser کانادا) درباره‌ی نوشته‌جات گمشده‌ی بوسهل کوهی، Mason (دانشگاه Open انگلیس) درباره‌ی آموزش ریاضیات، فعالیتی سازنده و خلاق، Stacey (دانشگاه Melborn استرالیا) درباره‌ی تدریس تفکر ریاضی به دانش‌آموزان.

به اعتقاد من اين سخنراني‌ها، چه آموزشي باشند، چه فوق برنامه و چه به هدف توسعه‌ي رياضيات مي‌توانند به طور كلي

دربارهي رياضيات باشد و نه صرفاً خود رياضيات. (براي اينكه مفهوم دربارهي رياضيات مشخص شود"اهداف و چشم اندازهای" مجلهي mathematical intelligencer را ببينيد).

پروفسور عباس عدالت،کالج ايمپريل انگليس,
سخنراني عمومي، خانهي رياضيات اصفهان ۸۳

پروفسور پيتر تيلر از دانشگاه كانبرا استراليا،
كارگاه رفع اشكال ، خانه ی رياضيات اصفهان۸٦

هدف اصلي اين سخنرانيها، مثل سياست اين خانهها،بايستي جذب مردم باشد. خانهي رياضي به مثابهي محل امني است هم براي مردمي كه از روي علاقه ميخواهند چيزي درمورد رياضي بدانند وهم آنهايي كه از رياضي ميترسند و نمیخواهند چيزی در موردش بدانند. ما ميخواهيم كه اين خانهها را به مأمني براي جواناني كه از رياضي ميترسند تبديل كنيم.

بايد رويدادهايي در اين خانه برگزار شود تا اعضاي خانه لحظات خوشي داشته باشند و يادآوري كنيم كه :

۱. بيشتر آنهايي كه از نقاشي خوششان ميآيد نقاشي نميدانند.

۲. بيشتر آنهايي كه موسيقي دوست دارند،چه كلاسيك چه پاپ، نه خواننده اند نه حتي سازي ميزنند.

۳. بيشتر آنهايي كه به تماشاي ورزش ،تئاتر ، شعبده بازي و غيره ميروند، نه دانش قبلی و نه تجربهاي در هيچ يك از اين فعاليتها دارند.

به خصوص،ما در اين خانهها نبايد دربارهي شاخص ارجاع، ضريب تأثير، تعداد مقالات، كسوت استادي، شأن دانشياري يا مدارك كسي حرفي بزنيم.و خوشبختانه آنهايي كه علاقهمند به اين موارد هستند حاميان معمول خانه نيستند و هيچ علاقهاي به فعاليتهاي خانه ندارند. چون امروزه بيشتر جوانان انگليسي ميدانند كتابخانههاي خانهي رياضي بايد دسترسي به ژورنالهاي رياضي مثل

Mathematical Intelligencer، Plus Magazine، American Mathematical Monthly، Mathematics Magazine، The College Mathematics journal، The Mathematics Gazette، Crux Mathematics و غیره داشته باشد.

ساختمان خانه ی ریاضیات تهران

اولين خانهي رياضي تهران در سال ١٣٨٨ و با حمايت وزارت آموزش و پرورش تأسيس شد اما فعاليتهاي كمي داشت. خانهي دوم با حمايت شوراي شهر تهران در سال ١٣٩١ ايجاد شد. ما به خانههاي رياضيات بيشتري در اين شهر بزرگ نياز داريم. بيشترجمعيت ايران جوانان هستند و بيشتر اين جوانان ودانش-آموزان ساكن تهران. من براي سخنراني در افتتاحيهي دومين خانهي رياضيات تهران دعوت شدم،و چون ميدانستم كه اين خانهها هميشه از ايدههاي جديد استقبال ميكنند از اين فرصت استفاده كردم و چند پيشنهاد دادم, كه به ٤ مورد اينجا اشاره ميكنم:

اول. ما بايد به ترس بيموردي كه از رياضيات بين جوانان هست توجه كنيم و راهي پيدا كنيم تا بفهمند آنچه ترسناك است رياضيات به خودي خود نيست، كه امتحاناتند. آنها بايد بدانند كه بسياري از بزرگان رياضي نيز، معمولا، به مسائل رياضي خارج از دايرهي تخصص خود نميتوانند به راحتي بپردازند. اگر ما هم بخواهيم در اين زمينهها امتحان بدهيم ما هم ميترسيم ومضطرب ميشويم. بيشتر دانشآموزان دبيرستان و بيشتر معلمان تصور ميكنند كه يك رياضيدان طراز اول كسي است كه بتواند در كسري از ثانيه ريشهي دوم هر عدد حقيقي مثبتي را پيدا كند، تجزيهي هر عدد صحيح بزرگي را بيان كند وهرمسألهاي درهندسه، حساب ياهرشاخهي ديگر رياضي را بدون هيچ مقدمهاي حل كند. معلمان فكر ميكنند كه يك رياضيدان، رياضيدان به دنيا آمده است، نه اين كه به عنوان رياضيدان تربيت شده است، پس هيچوقت در رياضي قوي نخواهند شد. دانشآموزان اين ايدهي اشتباه و هم

چنين ترسشان از رياضيات را در مدارس كسب مي‌كنند و معلمان بي‌تجربه و آن‌ها كه آموزش لازم را نديده‌اند هم ترس و كج فهميشان را به دانش‌آموزان انتقال مي‌دهند. بنابراين خانه‌هاي رياضي بايد به اين معلمان كمك كنند تا آگاهي خود را از رياضي به اندازه‌اي كه براي شغلشان لازم است بالا ببرند.

دوم. بر خلاف ديگر شاخه هاي علوم پايه در رياضي افراد زيادي هستند كه فكر مي كنند دست به كشفيات مهمي مثل crank[1] تثليث زاويه، اثبات آخرين قضيه‌ي فرما آن هم در چند خط، تربيع مكعب و غيره زده اند. قبل از تاسيس خانه‌هاي رياضي اين افراد معمولا اثبات هاي خود را به گروه‌هاي مختلف رياضي مي‌فرستادند و حتي به كنفرانس‌هاي سالانه‌ي كشور مي‌آمدند تا در مورد نوآوري‌هاي خود با شركت كنندگان حرف بزنند. ولي با تاسيس اين خانه‌ها طبيعي است كه سر و كله‌ي بعضي از اين افراد در اين خانه‌ها پيدا شود و دنبال كسي بگردند تا با او صحبت كنند. اعضاي خانه‌ها بايد به دقت و مؤدبانه با آنها برخورد كنند. البته نبايد ايده‌هاي عجيب و غريب آنها را تشويق كرد ولي وقتي نمي فهميمشان بايد اعتراف كنيم و اجازه دهيم كساني كه مي‌توانند اشتباهاتشان را نشانشان دهند. اين كه دانش آموزان و معلمان متوجه اشتباهشان شوند به آنها كمك فراواني ميشود. يادم مي‌آيد يكي از اين غير حرفه اي‌ها براي دو دهه پاي ثابت كنفرانس‌هاي سالانه‌ي رياضي بود تا زماني كه فوت كرد. من و بعضي همكارانم از صحبت با او در كنفرانس ها لذت مي‌برديم. بنابراين خانه‌هاي رياضي بايد ليستي از حرفه‌اي‌ها و داوطلبان تهيه كند تا در زمان لازم با آنهايي كه كمتر crank هستند صحبت كنند.([۹] را ببينيد)

سوم. خانه‌هاي رياضي بايد تورنومنت شهري برگزار كنند و مدارس شهرها و شهرستان‌هاي اطرافشان را متقاعد كنند تا به ترغيب دانش آموزانشان به شركت در اين رقابت بين المللي بپردازند. اين رقابت بيشتر از IMO روي آموزش رياضي كشور تاثير دارد. بر خلاف IMO اين رقابت‌ها به دانش آموزان زيادي از نقاط دورافتاده‌ي كشور فرصت ميدهد تا با دانش

[1] -1 Cranks در فارسی به تثلیثگراها معروفند.

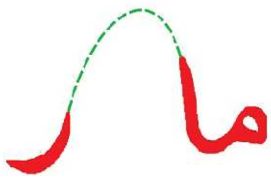
آموزان ديگر كشورها رقابت كنند و حتي تجربه‌ي فرهنگي خوبي برايشان محسوب ميشود بي آن كه به خارج از كشور سفر كرده باشند. اولين تورنمنت شهري يا همان مسابقه‌ي بين المللي رياضي در اتحاديه‌ي جماهير شوروي در سال ۱۹۷۹ايجاد شد.اوايل،اتفاقي كوچك و غير رسمي بود، رقابتي بين دانش آموزان شهرهاي بزرگ مثل مسكو،لنينگراد،كيف و شهرهاي كوچكتري كه در المپياد سراسري شوروي آن زمان شركت نميكردند مثل يامبول ، وارنا ، سوفيا ، روس.
ديگر شهرهاي بلغاري در ۱۹۸٤ و كانبرا و استراليا در ۱۹۸۸ به تورنمنت شهري پيوستند. شهرهاي ديگر استراليا مثل ملبورن، نيوكاسل وهوبرت هم در اين مسابقه شركت ميكنند. به خاطر شركت فعال كشورهاي شرق اروپا و علاقه‌اي كه اخيرا شهرهاي غرب و جنوب شرقي آسيا براي شركت در اين رقابت از خود نشان داده‌اند،تورنمنت شهري يك رقابت رياضي بين المللي به حساب مي آيد. هر چند از IMO متفاوت است ولي به همان اندازه مهم است. (براي جزييات در مورد تاريخ ، قوانين و فلسفه‌ي اين تورنمنت [۱۳] را ببينيد.)

چهارم،كه در عين آخرين بودن از ارزش كمتري نسبت به بقيه برخوردار نيست. همان طور كه مي‌دانيم در نيمه‌ي دوم قرن بيستم به لطف بورباكي هندسه از چشم خيلي كشورها از جمله ايران افتاد. خانه‌هاي رياضي بايستي تدريجا به گسترش هندسه بپردازند و كمك كنند تا هندسه دوباره وارد مدارس شود. براي اينكه به اين هدف برسيم بايد اول از همه، كاري كنيم بعضي معلمين در آموزش هندسه مهارت كسب كنند بنابراين بايد كارگاه ،سمينار، و دوره هاي كوتاه مدت برايشان برگزار كنيم. اينها اولين قدمهايي است تا شكاف موجود بين رياضي دانشگاه و رياضي دبيرستان برداشته شود.

يكي از اهداف اصلي اين خانه‌ها اين است كه مفاهيم و تفكرات رياضي به شيوه‌اي آسان به ديگران منتقل شود و آنها را نسبت به رياضي كنجكاو كند.

خوب است حكايت ايراني و قديمي مار را اينجا يادآور شويم:(توجه كنيد كه مار فارسي به انگليسي mar تلفظ مي‌شود)
از دو نفر خواسته شد تا مقابل حضاري بنويسند "مار". يكي از آنها به طور صحيح نوشت مار و ديگري كه بي‌سواد بود شكل مار

را كشيد. اكثر حضار فكر كردند،دومي بهتر مفهوم مار را منتقل كرده است.



مردم اين داستان را اين گونه تعبير ميكنند كه شخص بي سواد به خاطر كلكي كه سوار كرد تاييد شد. من اين طور فكر نميكنم. بلكه فكر ميكنم كه تاييد حضار به خاطر اين بود كه بيشتر آنها هم بي سواد بودند حتي بين آنها ممكن است كسي باشد كه حتي ماري هم نديده باشد و اين نقاشي ،چه با قصد حقه بازي چه كاملا بي اختيار،بود كه اين حيوان خطرناك را به اونشان داد. ولي شخص با سواد ميتوانست بهتر عمل كند و بعد از اين كه حقه بازي رقيبش را ديد در نوشتهي خودش "ما" را به "ر" وصل كند تا شكل ما-ر ايجاد شود و بگويد كلمهي مار به شكل مار نوشته ميشود و شكل مار است.

ما اين اتصال را اتصال ماري مينا‌ميم و كاري است كه بايد در رياضي انجام دهيم. به همين علت است كه مثلث جايگاه ويژهاي در خانهي رياضي بايد داشته باشد. اتصال ماري هيچ جايي بهتر از دانش وسيع مثلثها خود را نشان نميدهد.

اگر تعداد نتايج نابديهياي كه براي همهي فضاهاي توپولوژيك، گروهها، حلقهها و غيره درستند را بيآن كه هيچ شرط اضافي بر آنها اعمال كنيم با تعداد نتايج نابديهي كه در هر مثلثي درستند، مقايسه كنيم پي ميبريم كه هيچ موجودي تاكنون بهتر و طولانيتر از مثلث به رياضيات خدمت نكرده است.

من هيچ نتيجهي نابديهي نميشناسم كه در هر فضاي توپولوژيك[2] برقرار باشد. مثلاً در حلقهها ممكن است بگوييم كه هر حلقهي يكدار ايدهآل بيشين دارد. ولي بايد دقت كنيم كه وجود ايدهآل بيشين خود دقيقاً اصل انتخاب است. پيدا كردن نتايج نابديهي در ديگر مفاهيم رياضي را به شما واگذار ميكنم. وقتي كه قرار

2- حتی اگر مسأله حل نشده‌ی تعداد همه‌ی توپولوژی‌های ممکن که روی یک مجموعه‌ی متناهی تعریف می‌شوند را پیدا کنیم، این یک نتیجه ترکیبیاتی است و نه نتیجه توپولوژیک و هنوز هم نتیجه‌ای برای همه‌ی فضاهای توپولوژیک نیست.

است فقط از روي تعريف نتايجي را به دست بياوريم، هيچ موجودي در رياضي به گرد مثلث نميرسد.خدمت مثلث به رياضيات دائمي است.

به دست آوردن نتايج جديد در مثلث به آساني دريافت پول توسط كارت از دستگاه‌هاي عابر بانك است. ولي همان طور كه بايد در بانك سرمايه‌گذاري كرده باشيم تا بتوانيم از كارتمان استفاده كنيم بايد در هندسه‌ي اقليدسي هم سرمايه‌گذاري كرده باشيم تا قادر به كار با مثلث باشيم. اين سرمايه‌گذاري بايد از اولين روزهاي مدرسه شروع شود.چون اگر حتي برنده‌ي جايزه‌ي فيلدز هم باشيد و بيش از چهل سال سن داشته باشيد ولي در مدرسه ياد نگرفته باشيد كه زاويه‌ي بين نيمساز زاويه‌ي A و ارتفاع گذرنده از رأس A در مثلث ABC برابر با $|\frac{\angle B}{2}-\frac{\angle C}{2}|$ است، پس زاويه‌ي بين ميانه‌ى راس A وارتفاع گذرنده از رأسA كمتر از$|\frac{\angle B}{2}-\frac{\angle C}{2}|$ نيست، فهم اين نتيجه‌ي بديهي، وقت زيادي از شما مي‌گيرد چه برسد به حدس نقطه‌ي فرما، نقطه‌ي تلاقي شبه ميانه‌ها،دايره‌ي نه نقطه، مثلث ارتفاعيه و هزاران نتيجه‌ي نابديهي و جالب ديگر در باره‌ي مثلث. اگر به ورزش فكر كنيم، مثلاً فوتبال، مي‌بينيم كه اگر در جواني فوتبال نكرده باشيد در ميانسالي هرگز نمي‌توانيد فوتبال را شروع كنيد چون ممكن است به زانوهايتان به طور جدي آسيب بزنند.

بياييد در باره‌ي مثلث و اتصال ماري صحبت كنيم:

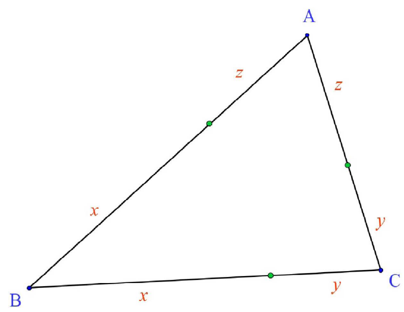
همه مي‌دانيم كه سه عدد حقيقي مثبت $a \le b \le c$ اضلاع يك مثلثند، اگر و فقط اگر $c < a + b$.حال اين سؤال مطرح مي‌شود كه آيا مي-توان دستگاهي از يك معادلات خطي شامل سه عدد حقيقي مثبت c،b،a داشته باشيم كه حل‌پذيربودنش در اعداد حقيقي معادل وجود مثلثي است كه اضلاعش اين سه عدد باشند؟ اين نتيجه‌ي ساده‌ي زير همين سؤال را پاسخ مي‌دهد. (از اثبات به خاطر بديهي بودن صرف نظر مي‌كنيم)

قضيه ۱. اگر c،b،a اعداد حقيقي باشند دستگاه

$$\begin{cases} a = x + y \\ b = y + z \\ c = z + x \end{cases}$$

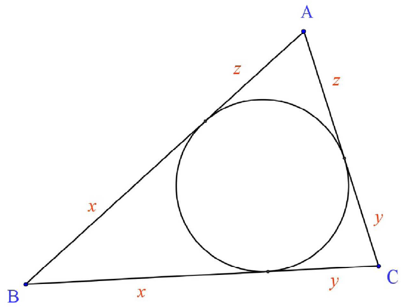
براي x،y،z جواب مثبت دارد، اگر و فقط اگر a,b,c اضلاع يك مثلث باشند.

اين معادلات مثل سه بار نوشتن كلمه‌ي مار است و پيدا كردن x,y,z مثل نوشتن بعضي قسمتهاي مار، كه البته نمي‌دانيم كدام قسمت-ها، نوعي عمليات جبري. ولي اين مار (يعني خود مثلث) كجاست؟ به بيان ديگر مي‌توان از شخص ظاهراً حقه‌باز بخواهيم اين مار رادوباره براي ما بكشد ولي اين بار با رسم اين سه قسمت روي بدنش،البته هيچ بي‌سوادي نمي‌تواند اين كار را انجام دهد،حتي اگر حقه‌باز باهوشي باشد. پس مي‌فهميم كه حل جبري (فقط نوشتن مار)گاهي به خودي خود همه چيز را آشكار نمي‌كند. حال مي‌توان پرسيد تعبير هندسي معادلات بالا چيست؟ و اين ما را به كشيدن شكل اين مار (يعني خود مثلث) رهنمون مي-كند.



روش جبري حل اين معادلات ميگويد كه x,y,z و نقاط جدا كننده روي اضلاع مثلث يگانه اند. اگر به اين اثبات جبري بسنده كنيم و تعبير هندسيش را بي پاسخ بگذاريم با بورباكي كه به صراحت گفته بود مرگ بر مثلث و سرنگون باد اقليدس هم صدا شده ايم.

اين هم از مار: x,y,z قسمت هايي‌اند كه توسط دايره‌ي محاطي روي اضلاع مثلث ايجاد شده اند. در حقيقت شكل زير از مار (مثلث)، اثبات كامل هندسي قضيه‌ي بالاست كه پاسخي براي تعبير هندسي و يگانگي نقاط بالاست.



این يك اتصال ماري ناب است كه به كرّات در هندسه‌ي جبري استفاده مي‌شود. پس، نوشتن مار همان جبر است و كشيدن مار همان هندسه و اتصال ماري همان هندسه‌ي جبري. در حالت كلي مرتبط كردن يك خاصيت جبري خاص از جبر چندجمله ايها روي يك ميدان با تعداد متناهي متغير به يك خاصيت هندسي مرتبط با فضاي آفين روي همان ميدان هميشه مورد علاقه‌ي كساني است كه در هندسه‌ي جبري تحقيق مي‌كنند،و شايد شروع كارشان با اتصال ماري بوده است؛ كه ايده آل ايجاد شده توسط هر مجموعه از چند جمله ايها در چندجمله ايهاي بالا توسط تعداد متناهي از همين چندجمله ايها به وجود مي‌آيد كه همان قضيه‌ي پايه‌ي هيلبرت است. اين نتيجه با وجودي كه به نظر مي‌رسد كاملاً جبري باشد ولي در واقع يك اتصال ماري زيباست كه نتيجه‌ي اساسي و سنگبناي هندسه‌ي جبري است. براساس اين اتصال ماري بنيادي مي‌توان بلافاصله نتيجه گرفت كه در هر مجموعه‌ي داده شده از چندجمله ايها روي اعداد حقيقي با n متغير، تك چندجمله اي روي اعداد حقيقي با nمتغير وجود دارد به طوري كه مجموعه‌ي همه‌ي نقاط كه هم زمان در چندجمله ايهاي آن مجموعه صدق مي‌كنند، با مجموعه‌ي نقاطي كه در آن تك چندجمله-اي بالا صدق مي‌كند منطبق مي‌شود. در حالت خاص به اين معني است كه در هر مجموعه اي از خمهاي مسطح با نقاط مشترك يك خم مسطح وجود دارد كه تنها از همين نقاط مشترك ميگذرد. آيا كسي با فقط دانش رياضي دبيرستان وجود دارد كه مجذوب زيبايي اين نتيجه نشود؟

برگرديم به قضيه‌ي ساده‌ي خودمان: مي‌دانيم كه مثلثهايي وجود دارند كه مجموع دو ضلع آن‌ها مي‌توانند به دلخواه بزرگتر يا به دلخواه نزديكتر به ضلع سوم باشدو متناظر با اين‌ها به ترتيب يك مثلث متساوي‌الساقين خيلي بلند و يك مثلث متساوي‌الساقين

با یك زاویه‌ي نزدیك به ۱۸۰ رادر نظر بگیرید. البته مي‌توان با در نظر گرفتن مثال نوع دوم كلاس بزرگي از مثال‌ها كه لزوماً مثلث‌هاي متساوي‌الساقین نیستند راارائه كنیم. در واقع براي هر مثلث ABC بازاویه‌ي A≥۹۰ همیشه داریم

$b+c < a+h_a$ كه در آن h_a ارتفاع گذرنده از رأس A باشد و بسته به نزدیكي A به ۱۸۰ مي‌تواند به دلخواه كوچك انتخاب شود، در نتیجه اگر a,b,c اضلاع یك مثلث باشند و داشته باشیم

$$\begin{cases} \frac{a+b}{c}=1+\alpha \\ \frac{a+b}{c}=1+\beta \\ \frac{a+b}{c}=1+\gamma \end{cases}$$

آن گاه در بعضي مثلث‌ها، بعضي از آلفا، بتا و گاماها مي-توانند به دلخواه بزرگ و یا به دلخواه كوچك باشند. ولي در حالت كلي نتیجه‌ي جالب و معروف زیر را (البته نه به شكلي كه مي‌بینید) براي همه‌ي مثلث‌ها داریم، كه ننتیجه‌ي ساده‌ي قضیه‌ي ۱ مي‌باشد.

قضیه‌ي ۲. اگر آلفا، بتا و گاما، مقادیر بالا را داشته باشند آن گاه $\alpha\beta\gamma \le 1$

اثبات: مي‌خواهیم نشان دهیم :

$$\left(\frac{a+b}{c}-1\right)\left(\frac{a+c}{b}-1\right)\left(\frac{b+c}{a}-1\right) \le 1$$

یا

$$(a+b-c)\,(a+c-\,b)(b+c-\,a) \le abc$$

كه به نامساوي لموس [8] و پادوآمعروفند. ([18] و [۱۷ضمیمه۱] را ببینید). برگردیم به قضیه ۱و معادلاتش و جواب‌هاي آن را كه عبارتند از $x=\frac{a+c-b}{2}$ و $z=\frac{b+c-a}{2}$ و $y=\frac{a+b-c}{2}$ به نامساوي اخیر منتقل كنیم، به منظور اثبات نامساوي دوم باید نشان دهیم $8xyz \le (x+y)(y+z)(x+z)$، كه با نامساوي AM-GM بدیهي است. (رجوع شود به ۲، ۱۱، ۱۵، ۱٤)

این قضیه معادل نامساوي AM-GM براي دو متغیر است. براي نشان دادن این موضوع فرض کنیم $a\leq b$ اعداد حقیقي مثبتند. بنابراین مثلثي وجود دارد با اضلاع a,b,b. اگر قرار دهیم c=b داریم $(2b- a) \leq ab^2a^2$،که بلافاصله نامساوي AM-GM را براي دو متغیر نتیجه ميدهد. عکس این مطلب از اثبات قضیهي بالا حاصل ميشود.

به عنوان مثال جذاب دیگري از مثلثها ميتوان نشان داد که از بین همهي مثلثها با مساحت مشخص،متساويالاضلاع کوچكترین محیط را دارد .(براي بیان نظراتي راجع به این نتیجه صفحات ٦، ١٤و١٥ را در [١٧] را ببینید)

فرض کنید S مساحت مثلث ABC با اضلاع a,b,c است، آن گاه طبق فرمول هرون داریم:

$$S^2 = P(P-a)(P-b)(P-c)$$

که در آن P نیممحیط است (یعني $P = \frac{a+b+c}{2}$). گرچه اثباتهاي زیادي براي فرمول هرون وجود دارد، ولي اجازه دهید کمي از بحث اصلیمان دور شویم و اثبات کوتاهي هم بیان کنیم. داریم

$$4S^2=b^2c^2sin^2A= b^2c^2(1+cosA)(1-cosA)$$

اگر به جاي cos A بگذاریم $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ نتیجه حاصل ميشود. حال اگر S ثابت باشد و بخواهیم $2P$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد،در این صورت جمع ٤ متغیر P،$P-a$،$P-b$،$P-c$که برابر $2P$است کمین ميباشد.و این وقتي اتفاق مي افتد که

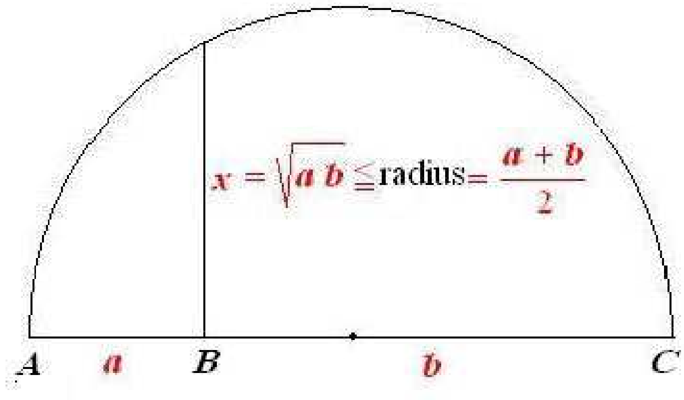
به عبارت دیگر $a=b=c=0$، باشد ولي این قابل قبول نیست و ميتوان با ترفندي دورش زد و رهایش کرد، به این صورت که

در نتیجه $2P$ کمین است اگر $\frac{1}{3}P+(P-a)+(P-b)+(P-c)=\frac{4}{3}P$ کمین باشد و این وقتي اتفاق ميافتد که

$$\frac{1}{3}P=P-a=P-b=P-c$$

،بنابراین $a=b=c=\frac{2}{3}P$؛ موفق شدیم که به جواب برسیم. [۱۲ صفحه ۹۹ مسئله ۱۱ را ببینید]

آیا فکر نمی‌کنید که فرمول هرون به اتفاق نامساوي AM-GM در چنین مسایلي به عنوان یك اتصال ماري دو سره عمل می‌کنند؟ آیا $\frac{1}{3}$ از آسمان نازل شد یا وجودش براي رسیدن به این عدد اجتناب ناپذیر بود؟ [ه اجتناب ناپذیر و غیر منتظره]. در واقع نامساوي AM-GM براي دو متغیر خود یك اتصال ماري است، همان طور که در بچّه مار معروف زیر می‌بینیم.



با یك هشدار جمع‌بندي می‌کنم. گرچه اتصال ماري ناب می‌تواند در ریاضي مفید باشد ولي باید مراقب نمونه‌ي غیر ناب آن نیز بود، مثل به تصویر کشیدن موجود عجیبي با تن مار،سر شیر و چشمان جغد که عرعر میکند. به یاد بیاوریم که ما همه این جا جمع شده‌ایم تا ریاضیات را قابل دسترس و آسان ارائه دهیم نه ایجاد موجود ترسناکي براي ترساندن مردم. نباید اجازه دهیم که خانه‌هاي ریاضیات تبدیل به خانه‌ي وحشت پر از مار شوند. نمونه‌ي ریاضي از این موجود ترسناك که در خانه‌هاي ریاضي نباید درباره اش حرف زد (البته به استثناي من و فقط این بار!) مثلثABC است با اضلاع$\sqrt[3]{3}$و$\sqrt[2]{2}$،$\sqrt[5]{5}$ و معادلات درجه سوم $f_i(x)=o، i=1،2، ....،9$ که ریشه‌هایشان سه ضلع مثلث، سه ارتفاع، سه‌بخشي که توسط دایره‌ي محاطي در اضلاع ایجاد شده‌اند، سه شعاع دایره‌ي مماس خارجي، سینوس زاویه‌ها، کسینوس زاویه‌ها، مجذور اضلاع، طول میانه‌ها، طول نیم‌سازهاي

مثلث ABC هستند را می‌توان در نظر گرفت. حال اگر قرار دهیم $g=\sum_{i=1}^{9} f_i(x_i)^8$ و آن را به شكل يك چندجمله‌اي بنويسيم وهمچنين قراردهيم

$$h=f_1(x_1).f_2(x_2).f_3(x_3).f_4(x_4).f_5(x_5).f_6(x_6).f_7(x_7).f_8(x_8).f_9(x_9).$$

و با ضرب اين چندجمله‌اي‌ها يک چندجمله‌اي h را به شكل چندجمله اي تنها به دست آوريم اين موجود ترسناك را داريم:

قضيه‌ي ۳.

اگر h و g چندجمله‌اي بالا در ۹ متغير باشند، آن گاه تعداد نامتناهي مثلث (به طور متناظر يك مثلث يگانه) داريم كه اگر به جاي $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9$ به ترتيب هر ضلع، هر ارتفاع، هر شعاع دايره‌ي مماس خارجي، سينوس هر زاويه، كسينوس هر زاويه، مجذور هر ضلع، طول هر ميانه، طول هر نيمساز اين مثلث ها (به طور متناظر اين مثلث يگانه) در h (به طور متناظر در g) قرار بگيرد، آن گاه h=0 (به طور متناظر g=0).

تقدير و تشكر. از داور اين مقاله به خاطر دقتي كه در خواندنش به خرج داد و پيشنهادات مفيدي كه ارائه كرد، هم چنين از پروفسور Senechal به خاطر نقد صبورانه و مؤثرش بر نسخه‌هاي ويرايش شده‌ي اين مقاله، از همكارم دكتر نامداري و دانشجوي دكترايم آقای غيور به خاطر حمايت‌هاي تكنيكي و تهيه‌ي فايل متنی اين مقاله و در آخر از همكارم دكتر رجالي كه توجه من را به [1] جلب كرد و عكس‌هاي خانه‌ي رياضيات اصفهان و تهران را در اختيارم گذاشت، تشكر مي‌كنم.

بیوگرافی امیدعلی شهنی‌کرم‌زاده

اميدعلي شهني كرم زاده در سال ۱۳٤۸ از دانشگاه تهران فارغ التحصيل شد و در همان زمان به عنوان فارغ التحصيل ممتاز كشور در رشته‌ی رياضی شناخته شد و بورسيه‌ي تحصيلي در خارج كشور را از آن خود كرد. در سال ۱۳۵۳ دكتراي خود را زير نظر D.Rees از دانشگاه اكستر انگليس دريافت كرد. از آن زمان به بعد در دانشگاه شهيد چمران اهواز (دانشگاه جندي شاپورِ پيش از انقلاب ۱۳۵۷) حضور داشته است.حوزه‌ي فعاليت او نظريه‌ي حلقه‌ها، توپولوژي و آموزش رياضي به سبک جرج پوليا‌ست. علاقه‌ي او به رياضي (به خصوص هندسه، نظريه اعداد و حل مساله) به روزهاي اوليه‌ي مدرسه‌اش برمي‌گردد. سخنراني‌هاي عمومي‌اش درباره‌ی رياضي (به فارسي) در دو جلد جمع آوري شده وچندين سال در رقابت المپياد رياضي كشور (و همچنين دانشجويان رياضي دانشگاه‌هاي ايران) شركت كرده‌است. در سال ۱۳۸۳ جايزه‌هایی براي عمومي سازی رياضي توسط انجمن توزيع علوم ايران دريافت كرد. هم چنين در سال ۱۳۸۹ انجمن رياضي ايران او را به عنوان برنده‌ی جايزه‌ی بهزاد برگزيدو در سال ۱۳۸٤ جايزه‌ي علمي - ملي چهره هاي ماندگار را از آن خود كرد.
پياده روي به طور منظم با دوستانش و گهگاه بازي پوكر (البته نه به خاطر شرط بندي كه براي سرگرمي) از تفريحات اوست.

فهرست مراجع

[1] M. Artigue، *Les défiesdel'enseignement des mathématiquesdans la scolarité de base*، Annexe 10، Paris:UNESCO، 2011.

[2] A. Azarang، The Persian Tarof in Mathematics، *The Mathematical Intelligencer*، 33 (2011)، No.4، 1-2.

[3] D. Branzei، *Notes on Geometry*، EdituraParalela 45، Romania، 1999.

[4] Edward. J. Barbeau، Peter J. Taylor، *Challening Mathematics in and Beyond the classroom: The 16th ICMI Study*، Subsection 2.4.1، Springer 2009.

[5] Alain J. Cain، Deux ex Machina، *The Mathematical Intelligencer* 32(2010)، No. 3، 7-11.

[6] N.A. Court، *College Geometry*، Barnes &Noble.Inc.، 1952.

[7] H.S.M. Coxeter، *Introduction to Geometry*، John Wiley، 1969.

[8] H.S.m. Coxeter، The Lehmus inequality، *AequationesMathematicae*28 (1985)، 1-12.

[9] D. Underwood، *Mathematical Cranks*، The MAA، Washington، D.C. 1992.

[10] O. Ghayour، *Unforgettable proofs* (a collection of four popular talks in Farsi، by O.A. S. Karamzadeh)، On the occasion of 35th Annual Iranian Mathematics Conference held at Chamran Univ، publishied by Chamran Univ، 2004.

[11] O.A.S. Karamzadeh، One-line proof of the AM-GM inequality، *The Mathematical Intelligencer* 33(2011)، No.2، 3.

[12] Nicholas D. Kazarinoff، *Geometric Inequalities*، MAA (1961).

[13] N.N. Konstantinov، J.B. Tabov and P.J. Taylor، *Birth of the tournament of towns*، *Mathematics Competitions*,4(1991)، No.2، 28-41.