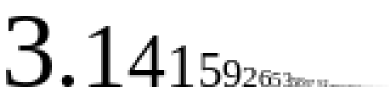
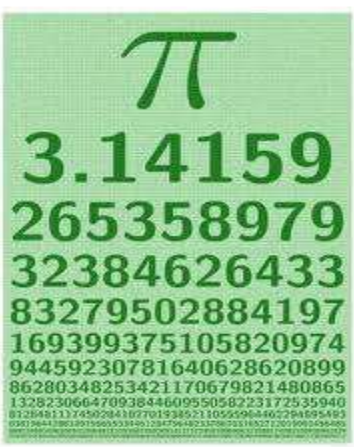
خانه ریاضیات اصفهان

Isfahan Mathematics House

به مناسبت روز جهانی
عدد π

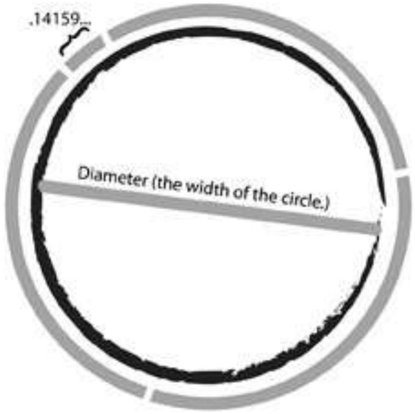


روز پي در 14 مارس (Year/**3/14**) و همچنین تولد آلبرت انشتاین در سراسر جهان جشن گرفته می‌شود. عدد PI با نماد يوناني "π" در رياضيات براى نشان دادن عدد نسبت محيط دايره به قطر آن است كه تقريبا برابر است با 3.14159 عدد پی همچنین به ثابت ارشمیدس نیز معروف است.



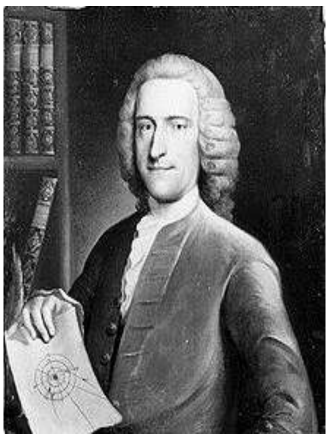
عدد به بیش از یک تریلیون رقم فراتر از اعشار محاسبه می شود. به عنوان یک عدد گنگ و متعالی که اعشار آن تا بینهایت دارای هیچ تکرار یا الگوی خاصی نیست.

اگرچه برای محاسبات عادی، تعداد ارقام اعشار محدودی از آن کافی است، ولی طبیعت بینهایت این عدد به عنوان یک موضوع جالب و سرگرم کننده و البته چالش برانگیز و بحث محاسباتی تا ارقام بیشتر و بیشتر تبدیل شده است.



عدد پی از تقسیم محیط دایره بر قطر آن به دست می‌آید. کشف عدد پی جزو مهمترین کشفیات در ریاضیات است. کارشناسان ریاضی هنوز نتوانسته‌اند زمان مشخصی برای شروع استفاده از این عدد پیش بینی کنند. عده زیادی، مصریان و برخی دیگر، یونانیان باستان را کاشفان این عدد می دانستند اما بررسی‌های جدید نشان می‌دهد، هخامنشیان هم با این عدد آشنا بودند.

بررسي‌هاي كارشناسي كه روي سازه‌هاي تخت جمشيد به ويژه روي ستون‌هاي تخت جمشيد و اشكال مخروطي انجام گرفته؛ نشان مي‌دهد كه هخامنشيان دو هزار و 500 سال پيش از دانشمندان رياضي‌دان استفاده مي‌كردند كه به خوبي با رياضيات محض و مهندسي آشنا بودند. آنان براي ساخت حجم هاي مخروطي راز عدد پي را شناسايي كرده بودند.



كمی بیش از دو قرن است که نسبت طول محیط دایره را به قطر آن، با نشانه π می‌شناسند. این نشانه حرف اول یک کلمه یونانی به معنای محیط است. برای نخستین بار «ویلیام جون»، ریاضیدان انگلیسی، در سال۱۷۰۶ از این نشانه استفاده کرد و از میانه سده هجدهم که «لیونارد اولر» (1783-1707)، کتاب «آنالیز» خود را چاپ کرد، دیگر در همه جا به کار رفت.

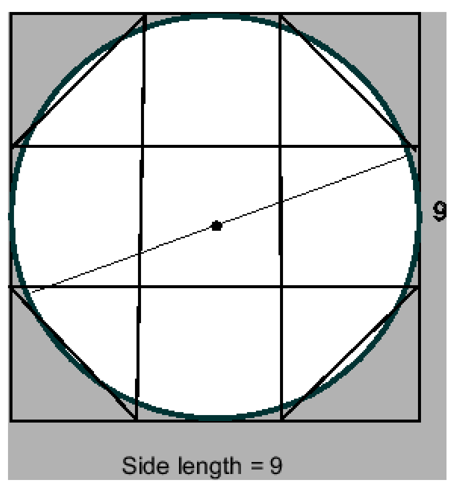
ولی خود مفهوم این عدد (البته بدون اینکه نشانه ای برای آن در نظر گرفته شده باشد)، بیش از چهار هزار سال سابقه دارد. آنها که هرم مشهور «خیوپوس» را مورد بررسی قرار داده اند، در نسبت اندازه های آن، رد پاهای آشکاری از این نسبت یعنی نسبت محیط دایره به قطر آن دیده‌اند:

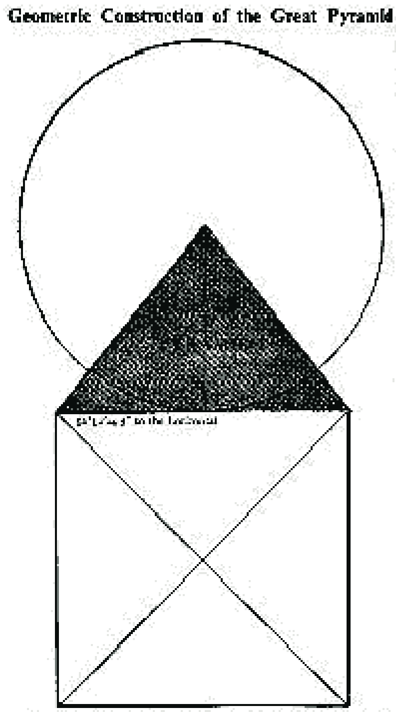
خارج قسمتی که از تقسیم مجموع دو ضلع قاعده بر ارتفاع هرم به دست می‌آید، مساوی ۳/۱۴۱۶ است و این همان مقدار عدد π است که سه رقم بعد از ممیز آن دقیق است.

مهندسان هخامنشی راز استفاده از عدد پی (۳/۱۴) را دو هزار و 500 سال پیش کشف کرده بودند. آنها در ساخت سازه های سنگی و ستون های مجموعه تخت جمشید که دارای اشکال مخروطی است، از این عدد استفاده می‌کردند.

http://www.bitwisemag.com/copy/wilf/wilf3.html

«پاپیروس» معروف به «آهمس» روش زیر را برای ساختن مربعی که سطح دایره داشته باشد،ذکر می‌کند: «از قطر دایره، یک نهم آن را کنار بگذارید و مربعی بسازید که ضلع آن مساوی اندازه بقیه قطر باشد، این مربع هم ارز دایره خواهد بود.» از این مطلب نتیجه می‌شود که مقدار π برای آهمس ، برابر ۳/۱۶۵۰ بوده است.





http://www.gizapyramid.com/passages.htm

کتاب های درسی تاریخ ریاضیات نشان می‌دهد که یونانی‌ها به رابطه PI و شعاع یک دایره و دور آن پی برده اند. فرمول ریاضی این است:

محیط = 2 * PI * شعاع

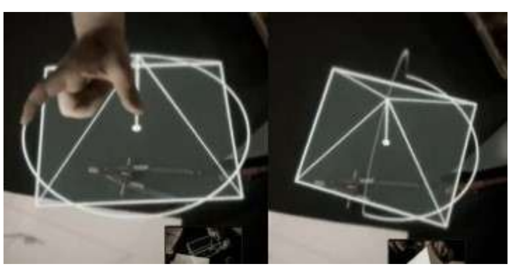
(C = 2 * PI * R)

در هر اندازه دایره رسم کنید، این رابطه همیشه درست است. بنابراین اگر شعاع آن را اندازه گیری و با 2 و PI ضرب شود، این مقدار محیط دایره است. به نظر می‌رسد که مقدار PI در هرم بزرگ GIZA، صدها سال پیش از کشف آن توسط یونانی ها بر می‌گردد.

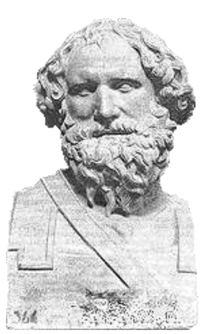
چگونه این مقدار در ساخت هرم بزرگ بکار رفته است؟

ارتفاع عمودی هرم، با محیط پایه آن (محیط دور پایه هرم) دارای همان رابطه ای است که شعاع با محیط دایره دارد.

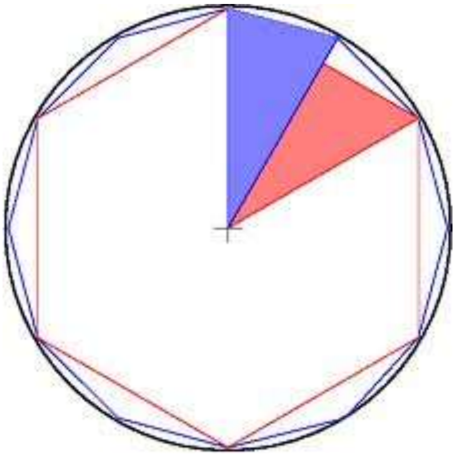
اگر ارتفاع هرم را به شعاع یک دایره بدست آوریم، در این‌صورت فاصله دور هرم مساوی محیط دایره خواهد بود!



ظاهرا سازندگان اهرام‌ها، از راز این عدد آگاه بوده‌اند. یونان باستان مساحت هر شکل هندسي را از راه تربيع آن يعني از راه تبديل ان به مربعي هم مساحت بدست مي آوردند. از اين راه توانسته بودند به چگونگي محاسبه هر شكل پهلو دار پي ببرند. آن گاه كه محاسبه مساحت دايره پيش آمد، دريافتند كه تربيع دايره مسئله اي ناشدني مي نمايد. در هندسه اقليدسي ثابت شده بود كه نسبت محيط هر دايره به قطر آن عدد ثابتي است و مساحت دايره از ضرب محيط در يك چهارم آن بدست مي آيد و مسئله بدان جا انجاميد كه خطي رسم كنند كه در ازاي آن با آن مقدار ثابت برابر باشد، رسم اين خط ناشدني است .سرانجام راه چاره را در آن ديدند كه يك مقدار تقريبي مناسب براي آن مقدار ثابت بدست آورند



یکی از اولین نظریه‌ها در مورد مقدار تقریبی عدد پی، را می‌توان به ارشمیدس(287-212 BC) نسبت داد. این نظریه بر پایه تقریب زدن مساحت دایره بوسیله یک شش ضلعی منتظم محیطی و یک شش ضلعی منظم محاطی استوار است. ارشمیدس کسر بیست و دو هفتم را بدست آورد که ساليان دراز آن را به کار مي‌بردند.



$< 3\,{}^{1}/_{7} \quad \text{pi} \quad > 3\,{}^{10}/_{71}$

http://itech.fgcu.edu/faculty/clindsey/mhf4404/archimedes/archimedes.html

پس از آن و براي محاسبات دقيق‌تر كسر سيصد و پنجاه و پنج بر روي صد و سيزده را به كار بردند. اختلاف بين عدد پي و مقدار تقريبي سيصد و پنجاه و پنج بر روي صد و سيزده فقط حدود سه ده ميليونم است.

بر اساس متون تاريخ و رياضيات نخستين كسي كه توانست به طور دقيق عدد پي را محاسبه كند، «غياث الدين محمد كاشاني» بود. اين دانشمند اسلامي عددپي را تا چند رقم اعشاري محاسبه كرد. پس از او دانشمنداني چون پاسكال به محاسبه دقيق تر اين عدد پرداختند. هم اكنون دانشمندان با استفاده از رايانه هاي بسيار پيشرفته به محاسبه اين عدد مي پردازند.

http://www.noormags.com

رياضي‌دان بزرگ ايراني جمشيد كاشاني براي نخستين بار مقدار ثابت نسبت محيط به قطر دايره را بدست آورد كه تا شانزده رقم پس از مميز دقيق بود. اين رياضي دان و منجم مسلمان ايراني توانست مقدار دو برابر π را تا شانزده رقم اعشار در رساله محيطيه برابر 6.2831853071795865 بدست آورد.

بخشی از مقدمه رساله محیطیه :

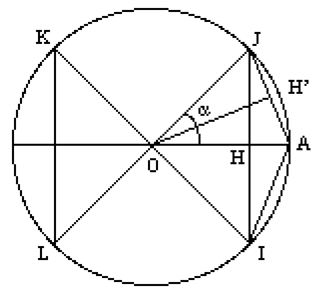
ستایش خداوندی را سزد که از نسبت قطر به محیط آن آگاه است و اندازه هر مرکب و بسیط را می‌شناسد و آفریننده زمین و آسمان ها و قرار دهنده نور در تاریکی است است و درود و سلام بر محمد مصطفی که مرکز دایره رسالت و محیط اقطار راهنمایی و دادگری است و بر خاندان و یاران پاک او باد.

ما بعد نیازمندترین بندگان خدای تعالی به آمرزش وی جمشید پسر مسعود پسر محمد حذف طبیب کاشانی ملقب به غیاث که خداوند احوال او را نیکو گرداند می گوید: «ارشمیدس ثابت کرده است که محیط (دایره) از سه برابر قطرش به اندازهٔ کمتر از 1/7 و بیشتر از 10/71 قطر، بزرگتر است. پس تفاوت بین این دو مقدار 1/497 (قطر) است. پس دایره ای که قطرش 497 ذراع یا قصب یا فرسنگ باشد مقدار محیطش در حدود پنج فرسنگ مجهول است زیرا قطر آن برحسب فرسنگ تقریباً پنج برابر مقدار مذکور می باشد و در فلک البروج (در محیط...) در حدود بسیار بیش از صدهزار فرسنگ مجهول است، و این مقادیر که در محیط ها (این اندازه) زیاد هستند در مساحت (ها) چه خواهند بود؟ این به علت آن است که وی (ارشمیدس) محیط 96 ضلعی محاط در دایره را استخراج کرده است و آن از محیط دایره کوچکتر می باشد زیرا هر ضلع آن از قوس روبروی آن کوچکتر است و مجموع اضلاع آن از محیط دایره کوچکتر می باشد و (ارشمیدس) محیط چند ضلعی دیگری را که مشابه با اولی و محیط بر (همان) دایره است استخراج کرده و به مدد قضیه اول نخستین مقالهٔ کتاب خود به ثبوت رسانیده است که آن از محیط دایره مذکور بزرگتر است و تفاوت بین آنها (در محیط) همان است که گفته شد.

تیکوبراهه منجم دانمارکی(1546-1601) در مطالعاتی ستاره شناسی خود، عدد پی را عدد اعشاری ۱۴۰۹ / ۳ معرفی نمود.

http://www.pi314.net/eng/viete.php

فرانسواویت ریاضی دان فرانسوی (Francois Viete 1540-1603) به کمک ۳۹۳۲۱۶ ضلعی مقدار پی راتا ۹ رقم اعشار محاسبه کرد.



ریاضیدانانی زیادی عدد پی را تا ارقام خاصی محاسبه نمودند.
جان والیس 1616-1703

$$\pi = 2\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\ldots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\ldots}$$

www.pi314.net/eng/wallis.php/

آندریاس رومانوس 1561-1615 با استفاده از چندضلعی 320 وجهی عدد را تا 17 رقم اعشار محاسبه نمود که فقط 15 رقم آن صحیح بود.

سپس لودلف ونسلن سه سال بعد، از روش ارشمیدس و چندضلعی با 500 میلیون ضلع آن را تا 35 رقم محاسبه نمود. وی سالهای زیادی از عمرش را در شکار عدد پی گذراند. او در سال 1610 درگذشت و رقم محاسبه شده اش را روی سنگ قبرش در حیاط کلیسای سنت پیترز لیدن نوشتند.

Ludolph's number between

$$3\frac{14159265358979323846264338327950288}{100000000000000000000000000000000000}$$

and

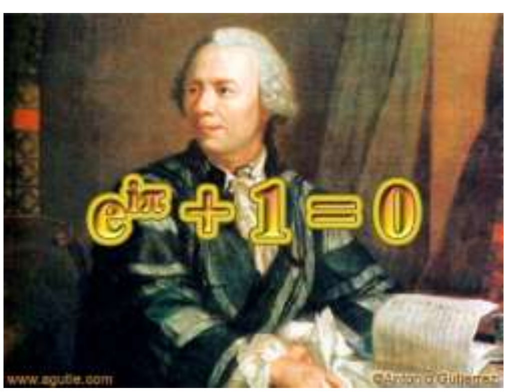
$$3\frac{14159265358979323846264338327950289}{100000000000000000000000000000000000}$$

ویلیام برونکر با ادامه کار والیس عدد را بصورت زیر تخمین زد :

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cdots}}}}$$

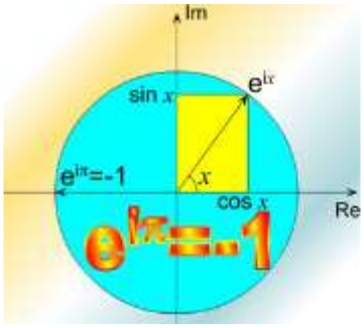
آبراهام شارپ 1717 -1699م . با استفاده از الگوریتم چندضلعی، عدد پی را تا 72 رقم اعشار محاسبه کرد:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\,(-1)^k\, 3^{1/2-k}}{2\,k+1}$$



لئونارد اویلر ریاضیدان و فیزیکدان سوئیسی(1707-1783) فرمول زیبا و فوق العاده خود را که 5 عدد ثابت ریاضی(پایه لگاریتم طبیعی، عدد i یا ریشه -1، عدد پی یا نسبت محیط به قطر دایره و عدد 0 و 1) را بهم پیوند می‌دهد را ابداع نمود.

$$e^{ix} = cos(x) + isin(x)$$
$$e^{i\pi} = -1$$



$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdot \frac{7^2}{7^2-1} \cdot \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

در زبان‌های مختلف شعرها ومتن هایی گفته اند که با شمارش کلمات وحروف آن ارقام پی مشخص می شود

.در زبان فارسی نیز شعر زیر مقدار پی را تا ۱۰ رقم اعشار نمایان می کند:

خرد و بینش و آگاهی دانشمندان ره سرمنزل توفیق بما آموزد

۳ ۱ ۴ ۱ ۵ ۹ ۲ ۶ ۵ ۳ ۵

در این‌جا مقدار پی را تا ۳۰ رقم اعشار بیان می‌کنیم:

۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳۲۷۹

ریاضیدانان اروپایی در قرن هفدهم به مقدار واقعی عدد پی نزدیک‌تر شدند. از جمله این دانشمندان جیمز گریگوری 1638-1675 بود که برای پیدا کردن مقدار عدد پی از فرمول زیر استفاده کرد:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots = \frac{\pi}{4}$$

یکی از مشکلاتی که در این روش وجود دارد این است که برای پیدا کردن مقدار عدد پی تا 6 رقم اعشار باید پنج میلیون جمله از سری فوق را با هم جمع کنیم.

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Pi_through_the_ages.html

در اوایل قرن هجدهم ریاضیدان و ستاره شناس انگلیسی به نام جان ماشین 1686-1751 م. فرمول جیمز گریگوری را اصلاح کرد که این فرمول امروزه نیز در برنامه های رایانه‌ای برای محاسبه عدد پی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این فرمول به صورت زیر است:

$$\frac{\pi}{4} = 4\cot^{-1}5 - \cot^{-1}239$$

http://milan.milanovic.org/math/english/pi/machin.html

با استفاده از این فرمول یک انگلیسی به نام ویلیام شانکس مقدار عدد پی را تا 707 رقم اعشار محاسبه کرد، در حالی‌که فقط

527 رقم آن درست بود. امروزه مقدار عدد پی با استفاده از پیشرفته‌ترین رایانه‌ها تا میلیون‌ها رقم محاسبه شده است و تعداد این ارقام هنوز در حال افزایش است.

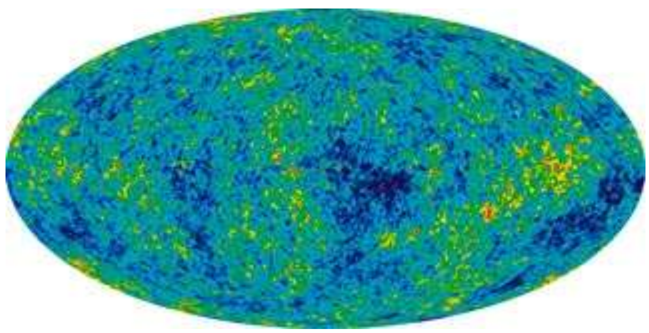
$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

http://www.xtimeline.com/timeline/Estimating-the-Numerical-Value-of-Pi

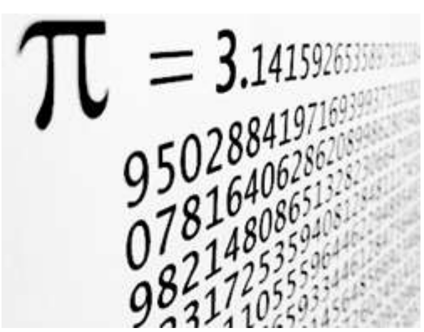
فرمول محاسباتی بیلی-برونین-پلوف یا BBP : عدد پی در سال 1995 توسط سیمون پلوف به صورت زیر است :

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right)\right].$$

http://www.pi314.net/eng/nieme_digit.php



هم اکنون دانشمندان در بزرگ‌ترین مراکز علمي و مهندسي جهان چون «ناسا» براي ساخت فضاپيماها و استفاده از اشكال مخروطي توانسته‌اند عدد پي را تا چند صد رقم اعشار حساب كنند.

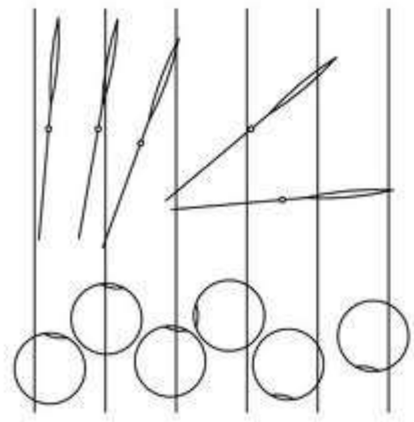


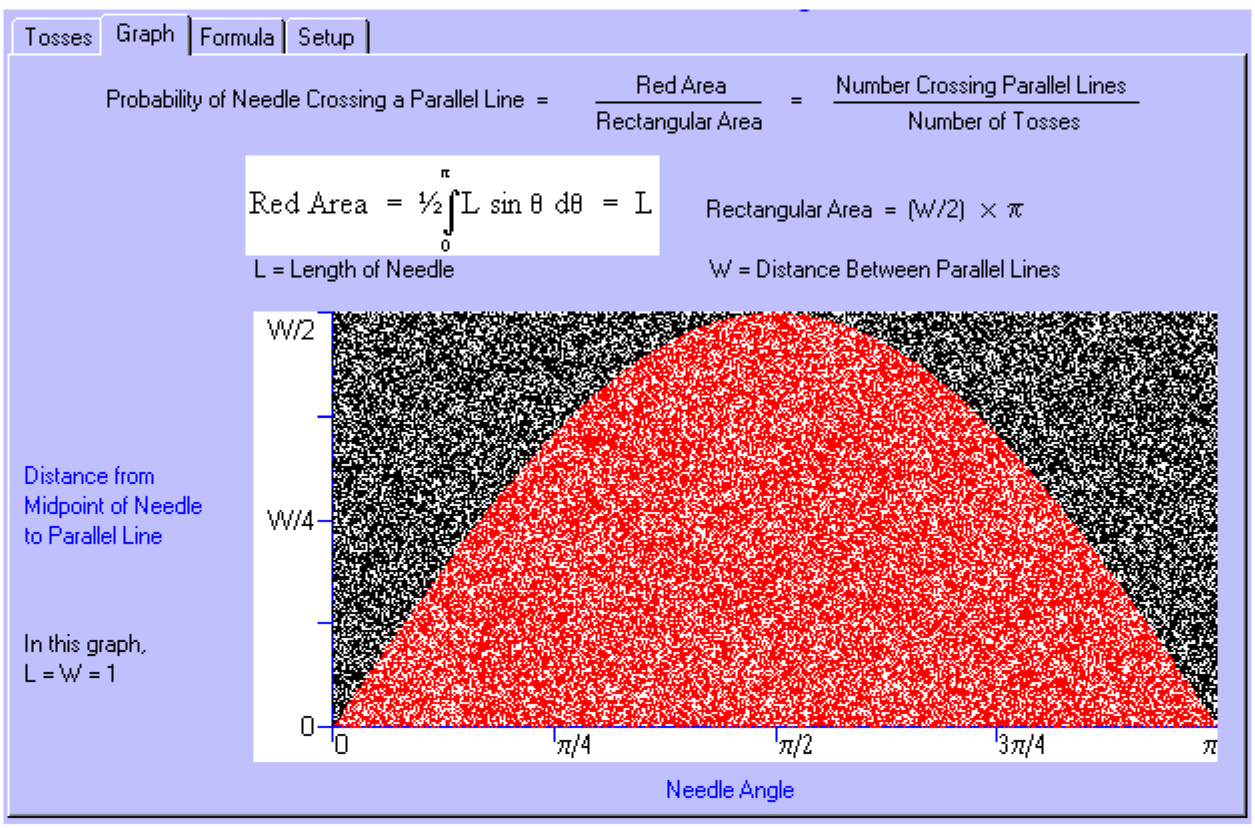
روش‌های محاسباتی زیادی تا کنون برای این عدد جادویی در نظر ابداع شده است. جدیدترین محاسبات مقدار عدد پی را تا دو هزار و 700 بیلیون رقم تعیین کرده اند که آخرین آن توسط "فابریس بلارد" سال 2010 در 131 روز و با استفاده از یک ترابایت فضای یک هارددیسک و یک کامپیوتر رومیزی انجام گرفته است. این نتیجه 123 بیلیون رقم بیشتر از رکورد قبلي است كه توسط پروفسور داي سوكه تاكاهاشي ژاپني به دست آمد.

امروزه برای محاسبه این رقم از رایانه استفاده می‌شود، اما می توان با کمک چند سوزن و برگه ای کاغذ خط دار نیز این عدد را به راحتی محاسبه کرد. سوزن‌ها را بر روی کاغذ بیاندازید و میزان درصد سقوط سوزن‌ها بر روی یک خط مستقیم را محاسبه کنید. با کمی دقت پاسخ به دست آمده باید طول سوزن تقسیم بر فاصله میان خطوط باشد که در عدد دو تقسیم بر عدد پی ضرب شده باشد. این فرمول پس از ارائه آن توسط "کامت دو بوفون" ریاضیدان فرانسوی در سال 1733 به "مسئله سوزن بوفون" شهرت یافته است.

http://www.efg2.com/Lab/Mathematics/Buffon.htm

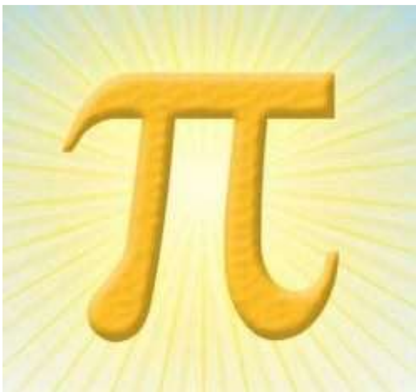
این نظریه در سال 1901 برای اولین بار مورد آزمایش "ماریو لازارینی" قرار گرفت و وی برای محاسبه عدد در حدود سه هزار و 408 سوزن را بر روی کاغذ ریخت تا بتواند مقدار عدد پی را تا 3.1415929 به دست آورد.



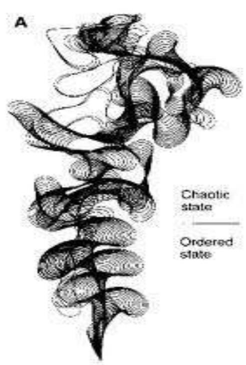


عدد مشهور 3.14 یا همان عدد "پی" در پیچیده ترین حالت عددی خواهد بود که تا کنون دو هزار و 700 بیلیون رقم اعشار برای آن محاسبه شده است اما نشریه نیوساینتیست پنج وجه دیگر این عدد را نیز به مناسبت روز عدد پی آشکار کرده است .ریاضیدانان هر سال در 14 مارچ روز عدد پی را گرامی می دارند. روزی که به احترام محاسبه اولین اعشار عدد مشهور 3.14 نامگذاری شده است. شاید همه بدانند که عدد پی نسبت محیط دایره به قطر آن را تعیین می کند اما حقایق ناآشناتری درباره این پدیده ریاضی نیز وجود دارد که در ادامه به پنج مورد از آنها اشاره خواهد شد.

عدد پی در آسمان



شاید ستاره های آسمان الهام بخش یونانیان باستان بوده‌اند، اما یونانیان هرگز از این نقاط درخشان برای محاسبه عدد پی استفاده نکرده‌اند. رابرت ماتیوز از دانشگاه استون به منظور انجام این محاسبه اطلاعات نجومی و اخترشناسی را با نظریه اعداد ترکیب کرد. وی از این حقیقت که برای هر مجموعه بزرگ از اعداد اتفاقی احتمال اینکه هر دو عدد با یکدیگر هیچ وجه مشترکی نداشته باشند، عدد 6 تقسیم بر عدد پی به توان دو خواهد بود، استفاده کرد. ماتیوز فاصله فضایی میان 100 نمونه از درخشانترین ستاره های آسمان را محاسبه کرده و آنها را به یک میلیون جفت از اعداد تصادفی تبدیل کرد که در حدود 61 درصد از آنها هیچ وجه اشتراکی با یکدیگر نداشتند. با این مطالعات ماتیوز توانست مقدار عدد پی را تا 3.12772 محاسبه کند که 99.6 درصد صحیح است.



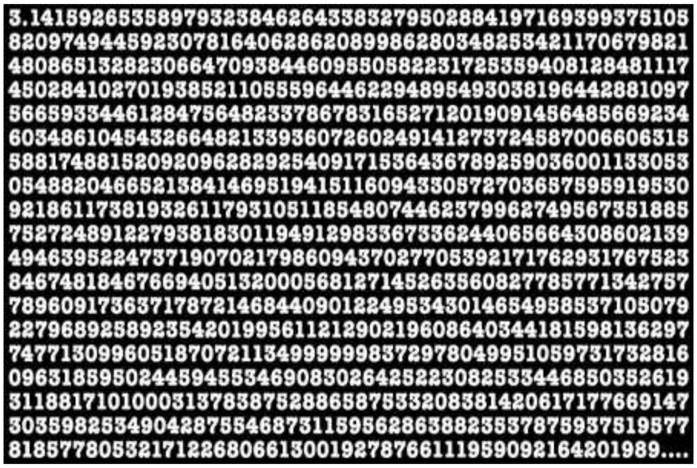
عدد پی مانند رودخانه ها به زمین باز می گردد:

عدد پی بر روی زمین نیز فعالیت‌هایی را به عهده دارد. این عدد می‌تواند مسیر رودخانه های پیچ در پیچی مانند آمازون را محاسبه کند. میزان پیچ و خم یک رود به واسطه انحراف آن از مسیر مستقیم تا منبع آب رود شرح داده می شود و عدد پی نشان می دهد یک رودخانه متوسط دارای انحراف مسیری در حدود 3.14 است.

پی تنها عددی است که الهام بخش ادبیات بوده است.

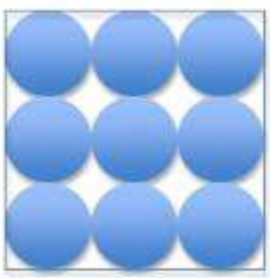
الکس بلوز روزنامه نگار در کتاب جدید خود با نام ماجراجویی‌های الکس در سرزمین اعداد شرح می‌دهد، چگونه عدد پی توانسته است الهام بخش شکلی از نگارش خلاقانه به نام Pilish شود. با استفاده از این شیوه اشعاری نگاشته می شوند که تعداد حروف واژه های متوالی در آن با کمک عدد پی

تعیین می‌شوند. یکی از مشهورترین اشعاری که به این سبک سروده شده است Cadaeic Cadenza نام دارد که توسط مایک کیث نوشته شده است. وی در عین حال کتابی 10 هزار کلمه‌ای را نیز با کمک این تکنیک نگاشته است.



اطلاعات بانکی شما در عدد "پی" دیده می شوند

عدد پی عددی بی قاعده است و می تواند برای همیشه امتداد داشته باشد، این به آن معنی است که احتمال یافتن هر نوع عددی در آن وجود خواهد داشت. تاریخ تولد، شماره تلفن و یا حتی جزئیات شماره حساب‌های بانکی افراد می‌توانند خود را در لشگر اعداد و ارقام عدد پی پنهان کرده باشند. در عین حال با استفاده از کدهایی که اعداد را به حروف تبدیل می‌کند، حتی می‌توان آثار کامل شکسپیر و یا هر کتاب دیگری که تا کنون نوشته شده است را در میان ارقام عدد پی مشاهده کرد.



احتمال این‌که دو عدد صحیح مثبت که به تصادف انتخاب شده‌اند، نسبت به هم اول باشند، برابر با $\frac{6}{\pi^2}$ است. احتمالا چارتر مشهور، در حدود سال ۱۹۰۴ این حکم ریاضی را به طور تجربی آزموده است، به این ترتیب که به هریک از پنجاه شاگردش گفت پنج جفت عدد صحیح مثبت را به طور تصادفی بنویسند. از میان ۲۵۰ جفت عددی که به این طریق به‌دست آمد، ۱۵۴ جفت نسبت به هم اول بودند و احتمال برابر ۱۵۴/۲۵۰ بود. او این نسبت را برابر $\frac{6}{x^2}$ گرفت و به‌دست آورد3.12=x ، و می‌دانیم که ...π=3.14159 است.

این موضوع شگفت‌آور است، این‌که انتخاب تصادفی جفت‌هایی از اعداد صحیح مثبت بتواند ارتباطی با عدد p داشته باشد، دور از تصور است. چشم‌انداز محاسبه عملی مقدار p از طریق آزمایش‌های تکراری، که ضمن آن‌ها تولیدکننده جفت‌های اعداد صحیح نمی‌داند از این جفت‌ها چه استفاده‌ای می‌شود، به کلی باورنکردنی به نظر می‌رسد.

Links

Pi poster from unihedron.com
Ask Dr. Math: About Pi
Pi Through the Ages
Wikipedia Pi
Video Pi

The Joy of Pi
Virtual Buffon's Needles
Buffon's Needle Problem
Happy Pi Day to You
Pi Day Greeting Cards

Pot Pourri Pi
If all you need is the first million digits ...
 What Value Do You Get?
Pi, ArcTangent, and the Fibonacci Numbers
Computing the Nth digit
Are the Digits of Pi Really Random?
Buffon's Needle
Where is the first occurrance of xxx in Pi?
The 'Pi is Rational' Page
Top ln(e^10) reasons why e is better than Pi
Indiana House of Representatives Declare
 Pi equals ...
Mnemonic Odes to Pi
A Piece of Pi (violin music)

منابع :

http://www.scizone.blogfa.com/cat-2.as

http://highpi.4t.com/about.html

http://www.piacrossamerica.org/whypi.html

http://www.math.rutgers.edu/~cherlin/History/Papers2000/wilson.html

http://www.pi314.net/eng/euler.php

http://www.piacrossamerica.org/whypi.html

http://www.newscientist.com

http://www.nature.com/nature/journal/v374/n6524/abs/374681b0.html

http://www.newsciencemagazine.com

http://www.roshd.ir

http://www.timeanddate.com/holidays/world/pi-day