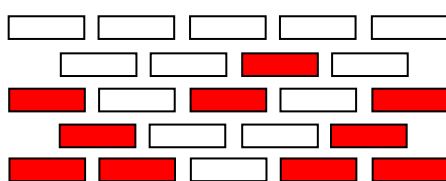
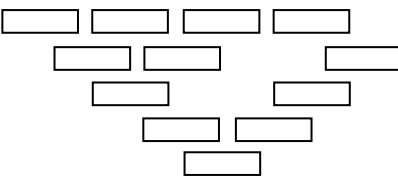


دانش آموزان عزیز ضمن تبریک به شما برای شرکت در این مسابقه و با آرزوی موفقیت، لطفاً به نکات زیر توجه کنید.

- ۱ - امتیاز تیم شما از جمع امتیاز ۶ سؤالی به دست می آید که از آن سؤالات امتیاز بیشتری گرفته باشید.
  - ۲ - هر تیم باید یک پاسخنامه را آماده کرده و تحویل دهد.
  - ۳ - اعضای هر تیم باید پس از فکر کردن و مشورت با یکدیگر، راه حل کامل هر سؤال را با خط خوانا زیر آن سؤال بنویسد.
  - ۴ - استفاده از ماشین حساب ممنوع است.
  - ۵ - این آزمون شامل ۱۰ سؤال می باشد که در ۴ صفحه تنظیم شده است.
- خانه ریاضیات شهر: .....  
 مشخصات اعضای تیم: ۱- ..... ۲- ..... ۳- .....

ردیف	سؤالات	امتیاز
۱	<p><math>x</math> و <math>y</math> دو عدد طبیعی متفاوت هستند که از ۱ تا ۱۰۰ انتخاب شده اند. بیش ترین مقدار <math>\frac{x+y}{x-y}</math> به دست آید.</p> <p><b>پاسخ:</b>              باید هر چه می توان صورت کسر را بزرگ و مخرج آن را کوچک کرد. کمترین اختلاف دو عدد طبیعی متفاوت یک است و بزرگترین عددها داده شده ۱۰۰ و ۹۹ می باشد. پس اگر <math>x = 100</math> و <math>y = 99</math> باشد. داریم:</p> $\frac{x+y}{x-y} = \frac{100+99}{100-99} = 199$ <p>بنابراین بیشترین مقدار ۱۹۹ است.</p>	۲
۲	<p>الف) ۹ عدد طبیعی فرد بنویسید که حاصل ضرب آنها برابر با حاصل جمع شان باشد.</p> <p>ب) آیا می توان ۴ عدد طبیعی فرد یافت که حاصل ضرب آنها برابر با حاصل جمع شان باشد؟</p> <p><b>پاسخ:</b>              الف) <math>1+1+1+1+1+1+1+3+5=15</math> , <math>1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 3 \times 5 = 15</math>              ب) خیر زیرا حاصل ضرب ۴ عدد فرد، فرد است. ولی جمع ۴ عدد فرد زوج می شود.</p>	۲
۳	<p>یک آجر در صورتی می افتد که هیچ آجر یا نیمه آجر در زیر آن نباشد. در شکل زیر حداکثر چند آجر می توان برداشت به طوری که آجرهای بالاترین ردیف پایدار بمانند؟</p> <p><b>پاسخ:</b>              حداکثر ۱۰ آجر که با رنگ قرمز مشخص شده را می توان حذف کرد. که آجر چینی به صورت زیر در می آید</p>  	۲

۲/۵	<p>۴ در شکل روبه رو نقطه <math>O</math> محل برخورد نیمسازهای زوایای <math>\hat{B}</math> و <math>\hat{C}</math> می باشد.</p> <p>اگر اندازه زاویه <math>\hat{A}</math>، <math>\frac{4}{7}</math> اندازه زاویه <math>\hat{O}</math> باشد و اندازه زاویه <math>\hat{OBC}</math>، <math>6</math> درجه بیشتر از زاویه <math>\hat{OCB}</math> باشد. اندازه <math>\hat{B}</math> را بیابید.</p> <p><b>پاسخ:</b></p> $\hat{OBC} = x \Rightarrow \hat{OCB} = x - 6 \Rightarrow \hat{O} = 180 - (x + x - 6) = 186 - 2x$ $\hat{A} = 180 - 2(x + x - 6) = 180 - 4x + 12 = 192 - 4x$ $\hat{A} = \frac{4}{7} \hat{O} \Rightarrow 7\hat{A} = 4\hat{O} \Rightarrow 7(192 - 4x) = 4(186 - 2x) \Rightarrow$ $x = 30, \hat{B} = 2x = 2 \times 30 = 60.$
۲/۵	<p>۵ مجموع اعداد زوج در یک جدول ضرب <math>10 \times 10</math> را به دست آورید.</p> <p><b>پاسخ:</b></p> <p>مجموع اعداد سطر اول = <math>1 + 2 + \dots + 10 = 55</math></p> <p>مجموع اعداد سطر دوم + ... + مجموع اعداد سطر دهم = مجموع اعداد سطر اول + مجموع اعداد سطر اول + ... + دو برابر مجموع اعداد سطر اول = مجموع همه اعداد</p> <p>ده برابر مجموع اعداد سطر اول + ... + دو برابر مجموع اعداد سطر اول = مجموع همه اعداد</p> $55 \times 1 + 55 \times 2 + \dots + 55 \times 10 = 55(1 + 2 + \dots + 10) = 55 \times 55 = 3025$ <p>مجموع اعداد فرد سطر اول = <math>1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25</math></p> <p>مجموعه اعداد فرد سطر نهم + ... + مجموع اعداد فرد سطر سوم + مجموع اعداد فرد سطر اول = مجموع همه اعداد فرد</p> <p>نه برابر مجموع اعداد فرد سطر اول + ... + سه برابر مجموع اعداد فرد سطر اول + مجموع اعداد فرد سطر اول = مجموع همه اعداد فرد</p> $25 \times 1 + 25 \times 3 + \dots + 25 \times 9 = 25(1 + 3 + \dots + 9) = 25 \times 25 = 625$ <p><math>3025 - 625 = 2400</math> = مجموع همه اعداد زوج - مجموع همه اعداد فرد = مجموع همه اعداد زوج</p>
۳	<p>۶ اهالی منطقه‌ای از سکه‌ای به نام دان استفاده می‌کنند. که ارزش هر دان برابر ۱۰۰۰ تومان است. میوه فروشی ۳۵ کیلوگرم میوه خرید و کیلویی ۷ دان بیشتر از بهای خرید، فروخت و ۲۰۲ دان از این بابت سود برد و مقداری از میوه‌ها را به علت پوسیدگی دور ریخت. (مقدار میوه پوسیده شده بر حسب کیلوگرم یک عدد صحیح است) بهای خرید هر کیلو میوه چقدر بوده است؟ چند کیلو از میوه‌ها پوسیده است؟</p> <p><b>پاسخ:</b> <math>X</math> را مقدار میوه پوسیده شده و <math>Y</math> را بهای خرید هر کیلو میوه در نظر می‌گیریم.</p> <p>سود = خرید - فروش</p> $(35 - x)(y + 7) - 35y = 202$ $35y + 245 - xy - 7x - 35y = 202$ $1 \times 43 = 43$ $x(y + 7) = 43 \Rightarrow x = 1, y + 7 = 43 \Rightarrow y = 36$ <p>یک کیلو از میوه‌هایش پوسیده است.</p>

۳

یک «مار عدد» از ۱۶ خانه درست شده، که از ۱ تا ۱۶ شماره‌گذاری شده‌اند و هر عدد متوالی در دو خانه هستند. که در یک ضلع مشترکند. یک «مار عدد» را می‌توان به صورت‌های زیادی در یک جدول ۴ در ۴ خانه‌ای نوشت. که یکی از آن‌ها در شکل (الف) نشان داده شده‌است. آیا می‌توانید یک «مار عدد» در مربع شکل (ب) به نحوی قرار دهید که شماره‌های ۷ و ۱۰ و ۱۱ در همان خانه‌هایی که نشان داده شده‌اند، قرار گیرند؟

۱۵	۱۴	۱۳	۱۲
۱۶	۱	۱۰	۱۱
۳	۲	۹	۸
۴	۵	۶	۷

(الف)

۱۲	۱۱	۱۰	۹
۱۳	۸	۹	۲
۱۴	۷	۶	۳
۱۵	۱۶	۵	۴

(ب)

**پاسخ:**

عدد ۹ یا باید سمت راست ۱۰ باشد یا زیر عدد ۱۰ و چون عدد ۸ باید کنار عددهای ۹ و ۷ باشد پس عدد ۹ حتماً زیر عدد ۱۰ قرار دارد و عدد ۱۲ باید سمت چپ یا زیر عدد ۱۱ قرار گیرد در نتیجه عدد ۱۳ در خانه ستون اول و سطر دوم باید قرار گیرد. بنابراین نمی‌توان مار عدد الی ادامه دارد. اگر ۸ را بالای عدد ۷ قرار دهیم و ۱۲ را کنار ۱۱ قرار می‌دهیم و بعد از ۱۳، ۱۴ و ۱۵ و ۱۶ را به ترتیب می‌نویسیم. بعد ۶ تا ۱ را به ترتیب مانند شکل قرار می‌دهیم.

۷

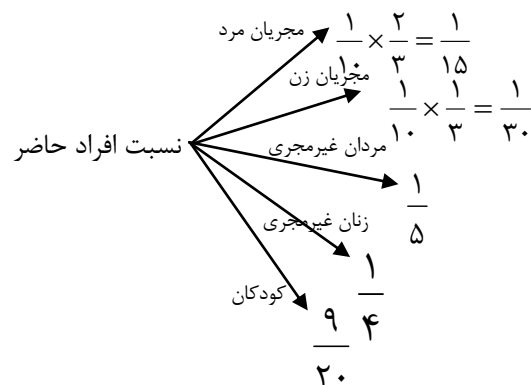
۳/۵

در یک مراسم جشن ده درصد افراد حاضر مجری مراسم هستند که شامل مردان و زنان بوده و تعداد مردان دو برابر تعداد زنان است. همچنین مردان غیرمجری ۲۰ درصد و زنان غیرمجری ۲۵ درصد افراد حاضر را تشکیل می‌دهند و بقیه شرکت کنندگان کودک و نوجوان هستند. اگر مجریان مراسم از ده نفر بیشتر باشند. حداقل تعداد افراد حاضر در مراسم چند نفر است؟

**پاسخ:**

$$\begin{aligned}
 10\% &= \frac{1}{10}, \quad 20\% = \frac{1}{5}, \quad 25\% = \frac{1}{4} \\
 \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} &= \frac{2+4+5}{20} = \frac{11}{20} \\
 1 - \frac{11}{20} &= \frac{9}{20}
 \end{aligned}$$

کودک و نوجوان  $\frac{9}{20}$



تعداد افراد شرکت کننده باید مضرب اعداد ۱۵ و ۳۰ و ۵ و ۴ و ۲۰ باشد. پس تعداد افراد شرکت کننده باید مضرب ۶۰ باشد.

۶۰ و ۱۲۰ و ۱۸۰ و ...

اگر تعداد افراد حاضر ۶۰ نفر باشد در نتیجه تعداد مجریان  $\frac{1}{10} \times 60 = 6$  نفر است. (غیرقابل قبول است)

اگر تعداد افراد حاضر ۱۲۰ نفر باشد در نتیجه تعداد مجریان  $\frac{1}{10} \times 120 = 12$  نفر که جواب مسأله است.

۸

<p>۴</p>	<p>۹</p> <p>فرض کنید <math>n = 9 + 99 + 999 + \dots + 99\dots9</math> باشد، که در آخرین عدد ۹۹ بار رقم ۹ ظاهر شده است. در این صورت در عدد <math>n</math> چند بار رقم ۱ تکرار شده است؟</p> $n = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots9}_{9 \text{ تا } 99} = (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \dots + \left( \underbrace{10\dots0}_{99 \text{ تا } 99} - 1 \right)$ $= \underbrace{111\dots1}_{1 \text{ تا } 99}0 - 99 = \underbrace{111\dots1}_{1 \text{ تا } 99}0 - 100 + 1 = \underbrace{111\dots1}_{1 \text{ تا } 100} - 100 = \underbrace{111\dots1}_{1 \text{ تا } 99}011$ <p>پس در عدد حاصل ۹۹ بار رقم ۱ تکرار شده است.</p>	<p>۹</p>
<p>۴</p>	<p>۱۰</p> <p>در شکل مقابل <math>ABCD</math> مربع و <math>O</math> مرکز آن است. اگر <math>AP = \frac{2}{3}AD</math>، <math>AM = \frac{3}{4}AB</math>، <math>ON \perp OM</math> و <math>OQ \perp OP</math> باشد. نسبت مساحت چهارضلعی <math>OMBN</math> به مساحت چهارضلعی <math>OPDQ</math> را بیابید.</p> <p><b>پاسخ:</b></p> <p>مساحت مربع را <math>S</math> در نظر می گیریم. از <math>O</math> بر اضلاع مربع عمود می کنیم. اگر پاره خطهای <math>ON</math>، <math>OF</math> را حول نقطه <math>O</math> و خلاف عقربه های ساعت ۹۰ درجه دوران دهیم. مثلث <math>OFN</math> روی مثلث <math>OEM</math> منطبق می شود.</p> <p>پس <math>S_{OFN} = S_{OEM}</math> در نتیجه <math>S_{OEBF} = S_{OMBN} = \frac{1}{4}S</math></p> <p>همچنین اگر <math>OP</math>، <math>OH</math> را ۹۰ درجه خلاف عقربه های ساعت حول <math>O</math> دوران دهیم. مثلث <math>OPH</math> بر مثلث <math>OGQ</math> منطبق می شود</p> <p>و <math>S_{OPH} = S_{OGQ}</math> در نتیجه <math>S_{OPDQ} = S_{OHDG} = \frac{1}{4}S</math> بنابراین <math>\frac{S_{OMBN}}{S_{OPDQ}} = 1</math></p>	<p>۱۰</p>

دانش آموزان عزیز، خسته نباشید، لطفاً دقت کنید که پاسخ هر سؤال را به طور کامل نوشته باشید. شاد و پیروز باشید