شماره گروه:

43th International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper
Spring 2021

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح پیشرفته ۱
فروردین ۱۴۰۱

– برای گروه‌هایی که هر سه نفر کلاس هشتم یا نهم هستند.

– امتیاز هر گروه براساس جمع امتیاز سه سوال با بیشترین نمره بدست می‌آید.

۱. بزرگترین عدد صحیح مثبت n را پیدا کنید به‌طوری که برای هر عدد اول p که $2 < p < n$، عدد $n - p$ هم اول است. [۴ امتیاز]

۲. ثابت کنید از هر چهارضلعی محدب می‌توان سه چهارضلعی برید و جدا کرد به‌طوری که هر سه چهارضلعی مشابه با چهارضلعی اولیه با نسبت تشابه $\frac{1}{2}$ باشند. (یعنی زوایای چهارضلعی کوچکتر برابر با زوایای متناظر در چهارضلعی اولیه باشند و اضلاع چهارضلعی کوچکتر نصف اضلاع متناظر در چهارضلعی اولیه باشند.) [۷ امتیاز]

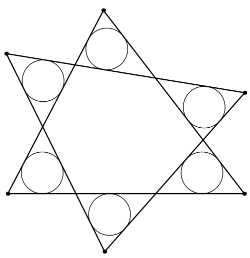
۳. آذر از هر یک از ۹ عدد n، $2n$، $3n$، ...، $9n$، رقم اول از سمت چپ را بر می‌دارد و روی تخته سیاه می‌نویسد. او عدد n را طوری انتخاب کرده که در بین ۹ رقم روی تخته سیاه، تعداد ارقام متفاوت کمترین مقدار ممکن باشد. تعداد ارقام متفاوت روی تخته سیاه چند تا است؟ [۷ امتیاز]

۴. یک مربع 100×100 سفید را در نظر بگیرید. برخی خانه‌ها (نه لزوماً مجاور) با سیاه رنگ شده‌اند. در هر سطر یا ستونی که شامل خانه سیاه است، تعداد خانه‌های سیاه فرد است. بنابراین می‌توانیم برای این سطر یا ستون، خانه سیاه *وسط* را در نظر بگیریم (خانه‌ای که تعداد خانه‌های سیاه دو طرفش برابر است). می‌دانیم که همه خانه‌های سیاه وسط در این سطرها، در ستون‌های متفاوتی قرار دارند و همه خانه‌های سیاه وسط در این ستون‌ها در سطرهای متفاوتی قرار دارند.

الف) ثابت کنید یک خانه سیاه وجود دارد که هم خانه سیاه وسط سطرش و هم خانه سیاه وسط ستونش است. [۵ امتیاز]

ب) آیا این درست است که هر خانه سیاه وسط یک سطر، خانه سیاه وسط ستونش نیز هست؟ [۵ امتیاز]

۵. اشتراک دو مثلث یک شش ضلعی است. اگر این شش ضلعی حذف شود، شش مثلث کوچک باقی می‌ماند. شعاع دایره محاطی این شش مثلث برابر است. ثابت کنید شعاع دایره محاطی دو مثلث اولیه هم برابر است. [۱۰ امتیاز]



۶. برای یک تورنمنت ۷ مدال طلا، ۷ مدال نقره و ۷ مدال برنز ساخته شده است. همه مدال‌های از یک جنس باید وزن یکسان داشته باشند و مدال‌های از جنس متفاوت باید وزن متفاوت داشته باشند. با این وجود، وزن دقیقاً یکی از مدال‌ها اشتباه است. اگر این مدال طلا است، سبک‌تر از یک مدال طلای استاندارد است؛ اگر این مدال برنز است، سنگین‌تر از یک مدال برنز استاندارد است؛ اگر این مدال نقره است، ممکن است سبک‌تر یا سنگین‌تر از یک مدال نقره استاندارد باشد. آیا ممکن است با سه بار وزن کردن روی یک ترازوی متعادل بدون وزنه، مدال غیر استاندارد را با اطمینان پیدا کنیم؟ [۱۰ امتیاز]

۷. فرض کنید p یک عدد اول و M یک چندضلعی محدب است. هم‌چنین فرض کنید دقیقاً p راه برای فرش کردن M با کاشی‌هایی به شکل مثلث متساوی الاضلاع به ضلع یک و مربع به ضلع یک وجود دارد. نشان دهید که طول یکی از اضلاع M برابر $p - 1$ است. [۱۲ امتیاز]

شماره گروه:

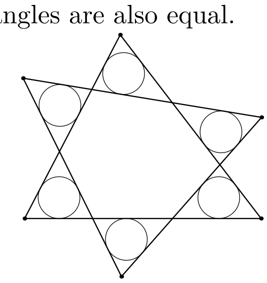
۱ A

43^{th} International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper
Spring 2021

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح پیشرفته ۱
فروردین ۱۴۰۱

Grades 8 – 9 (ages 13 – 15)
(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed up.)

points		problems
4	1.	Find the largest positive integer n such that for each prime p with $2 < p < n$ the difference $n - p$ is also prime.
7	2.	Prove that for any convex quadrilateral it is always possible to cut out three smaller quadrilaterals similar to the original one with the scale factor equal to $1/2$. (The angles of a smaller quadrilateral are equal to the corresponding original angles and the sides are twice smaller then the corresponding sides of the original quadrilateral.)
7	3.	For each of the nine positive integers n, $2n$, $3n$, ..., $9n$ Alice takes the first decimal digit (from the left) and writes it onto a blackboard. She selected n so that among the nine digits on the blackboard there is the least possible number of different digits. What is this number of different digits equal to?
	4.	Consider a white 100×100 square. Several cells (not necessarily neighbouring) were painted black. In each row or column that contains some black cells their number is odd. Hence we may consider the *middle* black cell for this row or column (with equal numbers of black cells in both opposite directions). It so happened that all the middle black cells of such rows lie in different columns and all the middle black cells of the columns lie in different rows.
5	a)	Prove that there exists a cell that is both the middle black cell of its row and the middle black cell of its column.
5	b)	Is it true that any middle black cell of a row is also a middle black cell of its column?
10	5.	The intersection of two triangles is a hexagon. If this hexagon is removed, six small triangles remain. Those six triangles have the same radii of the incircles. Prove that the radii of the incircles of the two original triangles are also equal.



points		problems
10	6.	There were made 7 golden, 7 silver and 7 bronze medals for a tournament. All the medals of the same material should weigh the same and the medals of different material should have different weight. However, it so happened that exactly one medal had a wrong weight. If this medal is golden, it is lighter than a standard golden medal; if it is bronze, it is heavier than a standard bronze one; if it is silver it may be lighter or heavier than a standard silver one. Is it possible to find the nonstandard medal for sure, using three weighings on a balance scale with no weights?
12	7.	Let p be a prime number and let M be a convex polygon. Suppose that there are precisely p ways to tile M with equilateral triangles with side 1 and squares with side 1. Show that there is some side of M of length $p - 1$.

شماره گروه:

۲ A

43th International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper
Spring 2021

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح پیشرفته ۲
فروردین ۱۴۰۱

- برای گروه‌هایی که حداقل یک نفر کلاس دهم یا یازدهم است.

-امتیاز هر گروه براساس جمع امتیاز سه سوال با بیشترین نمره بدست می‌آید.

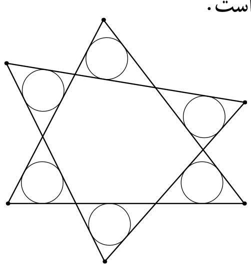
۱. آذر از هر یک از ۹ عدد n، $۲n$، $۳n$، ...، $۹n$، رقم اول از سمت چپ را بر می‌دارد و روی تخته سیاه می‌نویسد. او عدد n را طوری انتخاب کرده که در بین ۹ رقم روی تخته سیاه، تعداد ارقام متفاوت کمترین مقدار ممکن باشد. تعداد ارقام متفاوت روی تخته سیاه چند تا است؟ [۵ امتیاز]

۲. روی یک صفحه سفید دو محور متعامد x و y با مقیاس یکسان کشیده شده و نمودار تابع $y = f(x)$ در این دستگاه مختصات رسم شده است. سپس محور y و همه علامت‌های مقیاس روی محور x پاک شده اند. یک روش ارایه دهید که بتوانیم با کمک مداد، خط کش و پرگار دوباره محور y را رسم کنیم، اگر

الف) $f(x) = ۳^x$؛ [۴ امتیاز]

ب) $f(x) = \log_a x$ که $a > ۱$ یک عدد نامعلوم است. [۴ امتیاز]

۳. اشتراک دو مثلث یک شش ضلعی است. اگر این شش ضلعی حذف شود، شش مثلث کوچک باقی می‌ماند. شعاع دایره محاطی این شش مثلث برابر است. ثابت کنید شعاع دایره محاطی دو مثلث اولیه هم برابر است. [۸ امتیاز]



۴. یک رخ روی یک جدول $n \times n$ حرکت می‌کند بطوری که در هر نوبت از یک خانه به یک خانه مجاور با ضلع مشترک می‌رود و نهایتا همه خانه‌ها را یکبار می‌بیند. بابک اعداد ۱ تا $n^۲$ را متناظر با ترتیب خانه‌هایی که رخ از آن‌ها عبور کرده درون خانه‌ها می‌نویسد. فرض کنید M بزرگترین تفاوت عددهای درون خانه‌های مجاور با ضلع مشترک باشد. کمترین مقدار ممکن M چقدر است؟ [۸ امتیاز]

۵. بیشترین تعداد ریشه‌ها در بازه $(۰, ۱)$ از یک چندجمله‌ای درجه ۲۰۲۲ با ضرایب صحیح و ضریب جمله $x^{۲۰۲۲}$ برابر با یک چند است؟ [۸ امتیاز]

۶. پادشاه ۳۰۰ جادوگر را فرا می‌خواند و به آن‌ها چالش زیر را می‌دهد. در این چالش ۲۵ رنگ می‌تواند بکار رود که برای جادوگرها مشخص است. به هر کدام از این جادوگرها یک کلاه از یکی از این ۲۵ رنگ داده می‌شود. اگر تعداد کلاه‌های استفاده شده از هر رنگ نوشته شود، همه این اعداد متفاوت خواهند بود و این موضوع را جادوگرها می‌دانند. هر جادوگر می‌داند که به هر جادوگر دیگر چه کلاهی داده شده اما رنگ کلاه خودش را نمی‌داند. بطور هم‌زمان همه جادوگرها رنگ کلاه خودشان را اعلام می‌کنند. آیا ممکن است جادوگرها قبل از توزیع کلاه‌ها برنامه‌ای را باهم هماهنگ کنند طوری که حداقل ۱۵۰ نفر از آن‌ها رنگ درست را اعلام کنند؟ [۸ امتیاز]

۷. یک سفینه فضایی در یک نیم‌فضا قرار دارد به طوریکه فاصله آن تا مرز نیم‌فضا a است. خدمه این را می‌دانند اما نمی‌دانند از کدام جهت حرکت کنند تا به صفحه مرز برسند. سفینه می‌تواند در فضا در طول هر مسیری سفر کند، می‌تواند طول مسیری که تاکنون طی کرده را اندازه بگیرد و یک سنسور دارد که وقتی به مرز رسید علامت می‌دهد. آیا سفینه می‌تواند با اطمینان به مرز برسد، طوری که بیشتر از x حرکت نکند، که

الف) $x = ۱۴a$؛ [۶ امتیاز]

ب) $x = ۱۳a$؟ [۶ امتیاز]

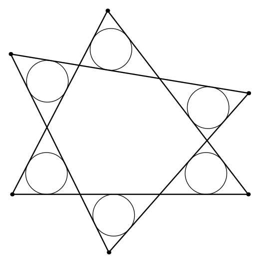
شماره گروه:

43th International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper
Spring 2021

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح پیشرفته ۲
فروردین ۱۴۰۱

Grades 10 – 11 (ages 15 and older)
(The result is computed from the three problems with the highest scores;
the scores for the individual parts of a single problem are summed up.)

points	problems
5	1. For each of the nine positive integers n, $2n$, $3n$, ..., $9n$ Alice takes the first decimal digit (from the left) and writes it onto a blackboard. She selected n so that among the nine digits on the blackboard there is the least possible number of different digits. What is this number of different digits equal to?
	2. On a blank paper there were drawn two perpendicular axes x and y with the same scale. The graph of a function $y = f(x)$ was drawn in this coordinate system. Then the y axis and all the scale marks on the x axis were erased. Provide a way how to draw again the y axis using pencil, ruler and compass if:
4	a) $f(x) = 3^x$;
4	b) $f(x) = \log_a x$, where $a > 1$ is an unknown number.
8	3. The intersection of two triangles is a hexagon. If this hexagon is removed, six small triangles remain. Those six triangles have the same radii of the incircles. Prove that the radii of the incircles of the two original triangles are also equal.



points	problems
8	4. A rook travelled through an $n \times n$ board, stepping at each turn to the cell neighbouring the previous one by a side, so that each cell was visited once. Bob has put the integer numbers from 1 to n^2 into the cells, corresponding to the order in which the rook has passed them. Let M be the greatest difference of the numbers in neighbouring by side cells. What is the minimal possible value of M?
8	5. What is the maximal possible number of roots on the interval $(0, 1)$ for a polynomial of degree 2022 with integer coefficients and with the leading coefficient equal to 1?
8	6. The king assembled 300 wizards and gave them the following challenge. For this challenge, 25 colors can be used, and they are known to the wizards. Each of the wizards receives a hat of one of those 25 colors. If for each color the number of used hats would be written down then all these numbers would be different, and the wizards know this. Each wizard sees what hat was given to each other wizard but does not see his own hat. Simultaneously each wizard reports the color of his own hat. Is it possible for the wizards to coordinate their actions beforehand so that at least 150 of them would report correctly?
	7. A starship is located in a halfspace at the distance a from its boundary. The crew knows this but does not know which direction to move to reach the boundary plane. The starship may travel through the space by any path, may measure the way it has already travelled and has a sensor that signals when the boundary is reached. Is it possible to reach the boundary for sure, having passed no more than:
6	a) $14a$;
6	b) $13a$?