شماره گروه:

42th International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper
Spring 2021

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح پیشرفته ۱
فروردین ۱۴۰۰

–برای گروه‌هایی که هر سه نفر کلاس هشتم یا نهم هستند.

–نمره هر گروه براساس جمع امتیاز سه سوال با بیشترین نمره بدست می‌آید.

۱. عدد ۴۷ × ۴۳ = ۲۰۲۱ مرکب است. ثابت کنید اگر ما هر تعداد رقم ۸ بین ۲۰ و ۲۱ وارد کنیم، عدد حاصل نیز مرکب خواهد بود. [۴ امتیاز]

۲. در یک اتاق چند بچه و یک بسته ۱۰۰۰ تایی شکلات وجود دارد. با ترتیبی بچه‌ها یکی پس از دیگری به سراغ بسته شکلات می‌آیند. هر بچه به محض رسیدن به بسته، تعداد شکلات‌های موجود در بسته را بر تعداد بچه‌های درون اتاق تقسیم می‌کند و اگر عدد حاصل صحیح نبود آن را گرد می‌کند، به تعداد عدد بدست آمده شکلات از بسته بر می‌دارد و اتاق را ترک می‌کند. همه پسرها رو به بالا گرد می‌کنند (مثلا ۳٫۱ به ۴ گرد می‌شود) و همه دخترها رو به پایین گرد می‌کنند (مثلاً ۱٫۸ به ۱ گرد می‌شود). فرایند ادامه می‌یابد تا همه بچه‌ها از اتاق خارج شوند. ثابت کنید مجموع تعداد شکلات‌هایی که نصیب پسرها می‌شود به ترتیب رسیدن بچه‌ها به بسته بستگی ندارد. [۵ امتیاز]

۳. یک مثلث متساوی الاضلاع ABC وجود دارد. فرض کنید E, F, K سه نقطه باشند بطوری‌که E روی ضلع AB، F روی ضلع AC، K روی امتداد ضلع AB باشد و $AE = CF = BK$. هم‌چنین فرض کنید نقطه P وسط پاره‌خط EF باشد. ثابت کنید زاویه KPC قائم است. [۶ امتیاز]

۴. یک گردشگر به یک جزیره می‌رسد که در آن ۵۰ بومی زندگی می‌کنند. همه بومی‌ها روی یک دایره می‌ایستند و هر کدام ابتدا سن نفر سمت چپ و سپس سن نفر سمت راست خود را اعلام می‌کند. هر بومی یا سردار است که هر دو عدد را درست می‌گوید یا سرباز است که یکی از دو عدد را (به انتخاب خودش) یک واحد اضافه‌تر و دیگری را یک واحد کمتر می‌گوید. آیا بعد از اینکه همه بومی‌ها اعداد را اعلام کردند، همواره می‌توان تعیین کرد که کدام یک سردار و کدام سرباز هستند؟ [۷ امتیاز]

۵. در مرکز هر خانه از یک مستطیل شطرنجی M، یک لامپ نقطه‌ای قرار دارد. همه لامپ‌ها ابتدا خاموش هستند. در هر نوبت، می‌توانیم یک خط راست انتخاب کنیم بطوری‌که آن خط هیچ لامپی را قطع نکند و همه لامپ‌های یک‌طرف خط خاموش باشند و سپس همه لامپ‌های آن طرف را روشن کنیم. می‌خواهیم همه لامپ‌ها را در بیشترین تعداد نوبت‌ها روشن کنیم. بیشترین تعداد نوبت‌ها چند است اگر:

الف) M یک مربع از اندازه ۲۱ × ۲۱ است؟ [۴ امتیاز]

ب) M یک مستطیل از اندازه ۲۱ × ۲۰ است؟ [۴ امتیاز]

۶. ۱۰۰ توریست در یک شب به یک هتل می‌رسند. آن‌ها می‌دانند که در این هتل اتاق‌های تک نفره با شماره‌های $1, 2, \ldots, n$ وجود دارند که از بین آن‌ها k اتاق در دست تعمیر است (توریست‌ها نمی‌دانند کدام اتاق‌ها در دست تعمیر است) و بقیه اتاق‌ها خالی هستند. توریست‌ها، یکی پس از دیگری، اتاق‌ها را با یک ترتیب دلخواه بررسی می‌کنند (این ترتیب ممکن است برای هر توریست با توریست دیگر متفاوت باشد) و اولین اتاقی را که در دست تعمیر نباشد می‌گیرند. توریست‌ها قبل از اینکه یک اتاق را بررسی کنند نمی‌دانند آن اتاق اشغال شده است یا نه. با این حال بررسی کردن یک اتاق اشغال شده ممنوع است و توریست‌ها باید از قبل استراتژی خودشان را هماهنگ کنند تا از این اتفاق جلوگیری کنند. برای هر عدد k، کوچکترین عدد n را تعیین کنید که برای آن، توریست‌ها بتوانند با اطمینان اتاق‌های خودشان را انتخاب کنند. [۱۰ امتیاز]

۷. فرض کنید p و q دو عدد صحیح مثبت باشند که نسبت به هم اولند. یک قورباغه در طول خط اعداد صحیح می‌پرد طوریکه در هر پرش یا p واحد به راست یا q واحد به چپ حرکت می‌کند. نهایتاً قورباغه به نقطه شروع برمی‌گردد. ثابت کنید برای هر عدد صحیح مثبت d که $d < p + q$، دو عدد وجود دارد که قورباغه روی آن‌ها می‌پرد و اختلاف آن دو عدد دقیقاً d است. [۱۲ امتیاز]

Grades 8 – 9 (ages 13 – 15)
(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed up.)

points	problems	
4	1.	The number $2021 = 43 \cdot 47$ is composite. Prove that if we insert any number of digits "8" between 20 and 21 then the number remains composite.
5	2.	In a room there are several children and a pile of 1000 sweets. The children come to the pile one after another in some order. Upon reaching the pile each of them divides the current number of sweets in the pile by the number of children in the room, rounds the result if it is not integer, takes the resulting number of sweets from the pile and leaves the room. All the boys round upwards and all the girls round downwards. The process continues until everyone leaves the room. Prove that the total number of sweets received by the boys does not depend on the order in which the children reach the pile.
6	3.	There is an equilateral triangle ABC. Let E, F and K be points such that E lies on side AB, F lies on side AC, K lies on the extension of side AB and $AE = CF = BK$. Let P be the midpoint of segment EF. Prove that the angle KPC is right.
7	4.	A traveller arrived to an island where 50 natives lived. All the natives stood in a circle and each announced firstly the age of his left neighbour, then the age of his right neighbour. Each native is either a knight who told both numbers correctly or a knave who increased one of the numbers by 1 and decreased the other by 1 (on his choice). Is it always possible after that to establish which of the natives are knights and which are knaves?
	5.	In the center of each cell of a checkered rectangle M there is a pointlike light bulb. All the light bulbs are initially switched off. In one turn it is allowed to choose a straight line not intersecting any light bulbs such that on one side of it all the bulbs are switched off, and to switch all of them on. In each turn at least one bulb should be switched on. The task is to switch on all the light bulbs using the largest possible number of turns. What is the maximum number of turns if:
4	a)	M is a square of size 21×21;
4	b)	M is a rectangle of size 20×21?
10	6.	100 tourists arrive to a hotel at night. They know that in the hotel there are single rooms numbered as $1, 2, \ldots, n$, and among them k (the tourists do not know which) are under repair, the other rooms are free. The tourists, one after another, check the rooms in any order (maybe different for different tourists), and the first room not under repair is taken by the tourist. The tourists don't know whether a room is occupied until they check it. However it is forbidden to check an occupied room, and the tourists may coordinate their strategy beforehand to avoid this situation. For each k find the smallest n for which the tourists may select their rooms for sure.
12	7.	Let p and q be two coprime positive integers. A frog hops along the integer line so that on every hop it moves either p units to the right or q units to the left. Eventually, the frog returns to the initial point. Prove that for every positive integer d with $d < p + q$ there are two numbers visited by the frog which differ just by d.

شماره گروه:

۲A

42^{th} International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper
Spring 2021

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح پیشرفته ۲
فروردین ۱۴۰۰

–برای گروه‌هایی که حداقل یک نفر کلاس دهم یا یازدهم است.

–نمره هر گروه براساس جمع امتیاز سه سوال با بیشترین نمره بدست می‌آید.

۱. در یک اتاق چند بچه و یک بسته ۱۰۰۰ تایی شکلات وجود دارد. با ترتیبی بچه‌ها یکی پس از دیگری به سراغ بسته شکلات می‌آیند. هر بچه به محض رسیدن به بسته، تعداد شکلات‌های موجود در بسته را بر تعداد بچه‌های درون اتاق تقسیم می‌کند و اگر عدد حاصل صحیح نبود آن را گرد می‌کند، به تعداد عدد بدست آمده شکلات از بسته بر می‌دارد و اتاق را ترک می‌کند. همه پسرها رو به بالا گرد می‌کنند (مثلا ۳/۱ به ۴ گرد می‌شود) و همه دخترها رو به پایین گرد می‌کنند (مثلاً ۱/۸ به ۱ گرد می‌شود). فرایند ادامه می‌یابد تا همه بچه‌ها از اتاق خارج شوند. ثابت کنید مجموع تعداد شکلات‌هایی که نصیب پسرها می‌شود به ترتیب رسیدن بچه‌ها به بسته بستگی ندارد. [۴ امتیاز]

۲. آیا یک عدد صحیح مثبت n وجود دارد بطوری‌که برای هر دو عدد حقیقی x, y، اعداد حقیقی $a_1, \ldots, a_n$ وجود داشته باشند که

$$x = a_1 + \cdots + a_n \quad \text{و} \quad y = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}?$$

[۵ امتیاز]

۳. فرض کنید M وسط ضلع BC از مثلث ABC باشد. دایره ω از نقطه A می‌گذرد، با خط BC در نقطه M مماس است، ضلع AB را در نقطه D و ضلع AC را در نقطه E قطع می‌کند. فرض کنید X و Y به ترتیب وسط پاره‌خط‌های BE و CD باشند. ثابت کنید دایره محیطی مثلث MXY با ω مماس است. [۵ امتیاز]

۴. یک ردیف $100N$ تایی ساندویچ ژامبون وجود دارد. یک پسر و گربه‌اش یک بازی انجام می‌دهند. در یک حرکت، پسر اولین ساندویچ را از یکی از انتهاهای ردیف می‌خورد. در یک حرکت، گربه ژامبون یک ساندویچ را می‌خورد یا هیچ کاری نمی‌کند. پسر ۱۰۰ حرکت در هر یک از نوبت‌های خودش انجام می‌دهد و گربه در هر نوبت، فقط یک حرکت انجام می‌دهد. پسر شروع‌کننده است و بازی وقتی پایان می‌یابد که او همه ساندویچ‌ها را خورده باشد. پسر برنده می‌شود اگر آخرین ساندویچی که می‌خورد، ژامبون داشته باشد. آیا این درست است که برای هر عدد صحیح مثبت N، پسر می‌تواند صرف نظر از اینکه گربه چطور بازی می‌کند، برنده شود؟ [۸ امتیاز]

۵. ۱۰۰ توریست در یک شب به یک هتل می‌رسند. آن‌ها می‌دانند که در این هتل اتاق‌های تک نفره با شماره‌های $1, 2, \ldots, n$ وجود دارند که از بین آن‌ها k اتاق در دست تعمیر است (توریست‌ها نمی‌دانند کدام اتاق‌ها در دست تعمیر است) و بقیه اتاق‌ها خالی هستند. توریست‌ها، یکی پس از دیگری، اتاق‌ها را با یک ترتیب دلخواه بررسی می‌کنند (این ترتیب ممکن است برای هر توریست با توریست دیگر متفاوت باشد) و اولین اتاقی را که در دست تعمیر نباشد می‌گیرند. توریست‌ها قبل از اینکه یک اتاق را بررسی کنند نمی‌دانند آن اتاق اشغال شده است یا نه. با این حال بررسی کردن یک اتاق اشغال شده ممنوع است و توریست‌ها باید از قبل استراتژی خودشان را هماهنگ کنند تا از این اتفاق جلوگیری کنند. برای هر عدد k، کوچکترین عدد n را تعیین کنید که برای آن، توریست‌ها بتوانند با اطمینان اتاق‌های خودشان را انتخاب کنند. [۸ امتیاز]

۶. حداقل یک عدد حقیقی A پیدا کنید بطوری‌که برای هر عدد صحیح مثبت n فاصله بین $\lceil A^n \rceil$ و نزدیکترین مربع یک عدد صحیح به آن، برابر ۲ باشد. (منظور از $\lceil x \rceil$ کوچکترین عدد صحیحی است که کمتر از x نیست.) [۱۰ امتیاز]

۷. یک عدد $n > 2$ داده شده است. پیام می‌خواهد n تا کمان با طول α از دایره‌های عظیمه یک کره با شعاع یک بکشد بطوریکه این کمان‌ها با یکدیگر اشتراک نداشته باشند. ثابت کنید که

الف) برای هر $\alpha < \pi + \frac{2\pi}{n}$ این‌کار ممکن است؛ [۶ امتیاز]

ب) برای هر $\alpha > \pi + \frac{2\pi}{n}$ این‌کار ممکن نیست. [۷ امتیاز]

منظور از دایره عظیمه، دایره‌ای است که از اشتراک کره با صفحه‌ای شامل مرکز کره بدست می‌آید.

۲ A

42th International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper
Spring 2021

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح پیشرفته ۲
فروردین ۱۴۰۰

خانه ریاضیات

Grades 10 – 11 (ages 15 and older)
(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed up.)

points	problems	
4	1.	In a room there are several children and a pile of 1000 sweets. The children come to the pile one after another in some order. Upon reaching the pile each of them divides the current number of sweets in the pile by the number of children in the room, rounds the result if it is not integer, takes the resulting number of sweets from the pile and leaves the room. All the boys round upwards and all the girls round downwards. The process continues until everyone leaves the room. Prove that the total number of sweets received by the boys does not depend on the order in which the children reach the pile.
5	2.	Does there exist a positive integer n such that for any real x and y there exist real numbers $a_1, \ldots, a_n$ satisfying $$x = a_1 + \ldots + a_n \quad \text{and} \quad y = \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}?$$
5	3.	Let M be the midpoint of the side BC of the triangle ABC. The circle ω passes through A, touches the line BC at M, intersects the side AB at the point D and the side AC at the point E. Let X and Y be the midpoints of BE and CD respectively. Prove that the circumcircle of the triangle MXY touches ω.
8	4.	There is a row of $100N$ sandwiches with ham. A boy and his cat play a game. In one *action* the boy eats the first sandwich from any end of the row. In one *action* the cat either eats the ham from one sandwich or does nothing. The boy performs 100 actions in each of his turns, and the cat makes only 1 action each turn; the boy starts first. The boy wins if the last sandwich he eats contains ham. Is it true that he can win for any positive integer N no matter how the cat plays?
8	5.	100 tourists arrive to a hotel at night. They know that in the hotel there are single rooms numbered as $1, 2, \ldots, n$, and among them k (the tourists do not know which) are under repair, the other rooms are free. The tourists, one after another, check the rooms in any order (maybe different for different tourists), and the first room not under repair is taken by the tourist. The tourists don't know whether a room is occupied until they check it. However it is forbidden to check an occupied room, and the tourists may coordinate their strategy beforehand to avoid this situation. For each k find the smallest n for which the tourists may select their rooms for sure.
10	6.	Find at least one real number A such that for any positive integer n the distance between $\lceil A^n \rceil$ and the nearest square of an integer is equal to 2. (By $\lceil x \rceil$ we denote the smallest integer not less than x.)
	7.	An integer $n > 2$ is given. Peter wants to draw n arcs of length α of great circles on a unit sphere so that they do not intersect each other. Prove that
6	a)	for all $\alpha < \pi + \frac{2\pi}{n}$ it is possible;
7	b)	for all $\alpha > \pi + \frac{2\pi}{n}$ it is impossible.