

بسمه تعالی
خانه ریاضیات اصفهان

اردیبهشت ماه ۱۴۰۳

سوالات هشتم - مرحله دوم از سومین مسابقه تیمی ریاضی (متر)

ردیف

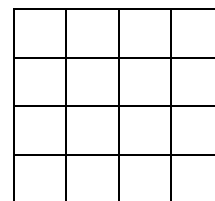
۱ یک جفت عدد طبیعی بزرگتر از یک و متمایز را «دوقلوی خوشحال» گوییم هرگاه حاصلضرب آن‌ها مربع کامل باشد. حاصل ضرب هر دوقلوی خوشحال را یک «عدد شاد» می‌گوییم.

الف) آیا مجموعه همه اعداد شاد، متناهی است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

ب) چند دوقلوی خوشحال وجود دارد که اعداد شاد نظیر آن‌ها از ۲۲۲ کوچکتر باشد؟

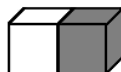
۲

یک مربع جادویی، مربعی است که در هر خانه آن یک عدد وجود دارد و مجموع عددهای هر سطر، هر ستون و هر دو قطر برابر است. آیا می‌توان با همه‌ی اعداد اول کمتر از ۵۵، یک مربع جادویی 4×4 تشکیل داد؟

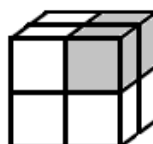


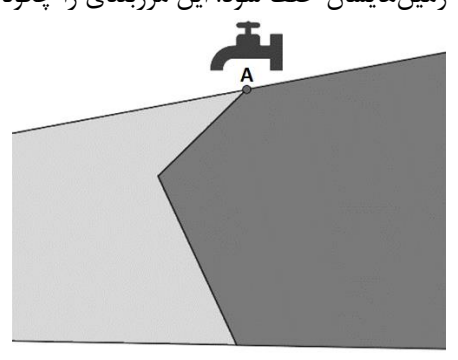
۳

می‌خواهیم با ۲ مکعب مستطیل به شکل زیر و ۴ مکعب سفید، یک مکعب درست کنیم.



در شکل‌های زیر یک طرح ساخته شده را می‌بینید. حساب کنید چند طرح مختلف دیگر می‌توان ساخت به گونه‌ای که در هیچ یک از این طرح‌ها، مکعب‌ها با چرخاندن قابل تبدیل به یکدیگر نباشند (طرح‌های مورد نظر را رسم کنید).



<p>۴ یک دسته شغال وارد یک باغ انگور با ۲۳۴ خوشه انگور شدند. نیمی از شغال‌ها هر خوشه انگور را در یک دقیقه و نیمی دیگر از آن‌ها هر خوشه انگور را در ۲ دقیقه می‌خورند. هر شغال در یک وعده ۳ خوشه می‌خورد و همه شغال‌ها بین هر دو وعده یک ربع استراحت می‌کنند. اگر خوردن تمام انگورهای باغ ۷۴ دقیقه طول بکشد، تعداد شغال‌ها چقدر بوده است؟</p>	<p>۴</p>
<p>۵ در شکل زیر زمین دو کشاورز را که به وسیله یک خط شکسته از هم جدا شده است، می‌بینید. منبع آبی روی مرز برای هر دو زمین قابل استفاده است که در شکل با نقطه A نشان داده شده است. کشاورزان قصد دارند به جای این مرز، یک مرز جدید بدون شکستگی ایجاد کنند تا کارشان راحت‌تر شود. بدیهی است که در این مرزبندی جدید، هر دو می‌خواهند کماکان به منبع آب دسترسی داشته باشند و مساحت زمین‌هایشان حفظ شود. این مرزبندی را چگونه می‌توان انجام داد؟ (استدلال خود را به طور کامل بنویسید).</p> 	<p>۵</p>
<p>۶ علی عدد ۱۰۸۹ را «جادویی» می‌نامد زیرا هر بار که یک عدد سه رقمی انتخاب کند، با انجام مراحل زیر به نتیجه یکسانی می‌رسد:</p> <ol style="list-style-type: none"> (۱) یک عدد سه رقمی انتخاب کنید. (۲) ترتیب ارقام آن را برعکس کنید. (۳) اختلاف اعداد گام ۱ و ۲ را به دست آورید. (۴) مقلوب عدد به دست آمده در گام ۳ را به دست آورید. (۵) مجموع اعداد به دست آمده در گام ۳ و ۴ را بیابید. <p>اگر محاسبات را درست انجام داده باشید شما هم به جادویی بودن عدد ۱۰۸۹ پی برده‌اید. با ارائه استدلالی، توضیح دهید چرا چنین چیزی رخ می‌دهد.</p>	<p>۶</p>

بر روی یک مثلث که مختصات رئوس آن به ترتیب $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ است چهار تبدیل هندسی زیر را به ترتیب انجام داده‌ایم:

۱. تقارن نسبت به محور طول‌ها،

۲. تقارن نسبت به محور عرض‌ها،

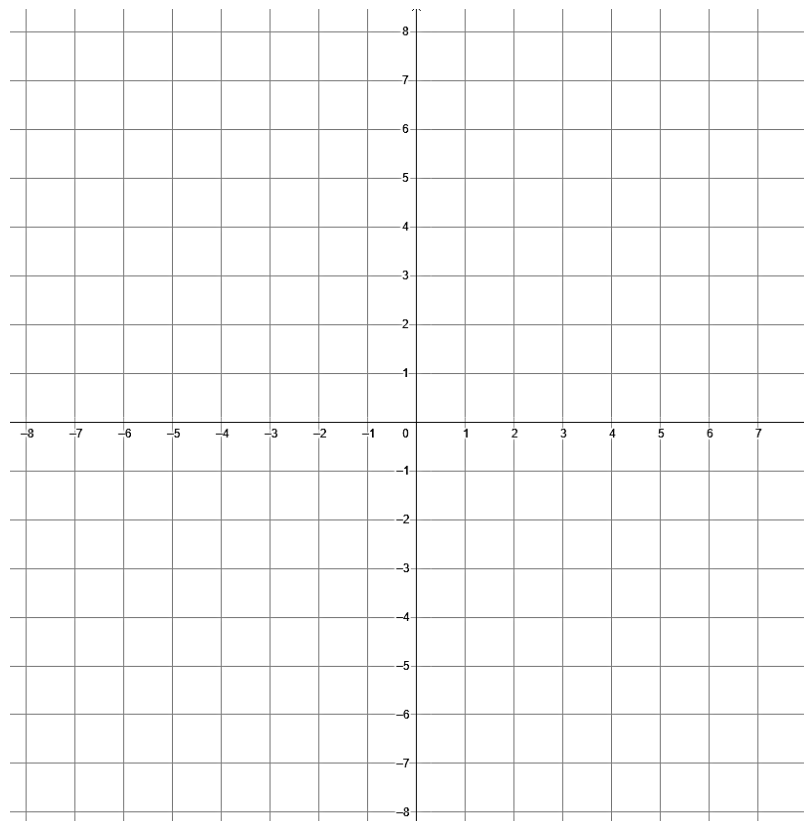
۳. انتقال با بردار $\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

۴. انتقال با بردار $\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

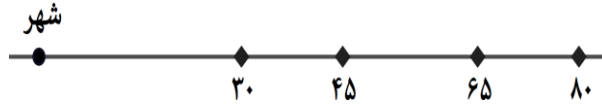
الف) مختصات رئوس مثلث به دست آمده را به دست آورید.

ب) برای چه ترتیب‌هایی از ۴ تبدیل بالا، مختصات رئوس مثلث به دست آمده مانند قسمت الف می‌شود؟ (دلیل خود را توضیح دهید.)

پ) نشان دهید مثلث به دست آمده از این چهار تبدیل را می‌توانستیم تنها با یک دوران 180° درجه از مثلث اول به دست آوریم (مرکز دوران را به دست آورید).



در امتداد جاده‌ای چهار کارخانه به فاصله ۳۰، ۴۵، ۶۵ و ۸۰ کیلومتر از یک شهر قرار گرفته‌اند.



الف) قرار است در این جاده یک مرکز فوریت‌های پزشکی احداث شود به طوری که مجموع فاصله این مرکز تا هر چهار کارخانه حداقل مقدار ممکن باشد. در این صورت محل ساخت این مرکز باید در چند کیلومتری شهر ساخته شود؟

ب) اگر کارخانه دیگری در فاصله ۷۰ کیلومتری شهر در حال ساخت باشد و بخواهیم مجموع فاصله‌های این پنج کارخانه تا این مرکز، کمترین مقدار باشد، این بار موقعیت مرکز را در چه فاصله‌ای از شهر قرار می‌دهید؟

پ) اگر به عنوان مسئول مکان‌یابی برای ساخت این مرکز باشید، به جز فاصله کارخانه‌ها، به چه عوامل دیگری توجه می‌کنید؟ توضیح دهید چگونه این عوامل را در روستان برای پیدا کردن یک موقعیت مناسب وارد می‌کنید.