

بسمه تعالی
خانه ریاضیات اصفهان

ردیف

اردیبهشت ماه ۱۴۰۳

سوالات هفتم - مرحله دوم از سومین مسابقه تیمی ریاضی (متر)

۱

نورا در تعطیلات نوروز یک بازی عددی طراحی کرده است. او هر بار یک عدد طبیعی را در نظر می‌گیرد و سپس مراحل زیر را تکرار می‌کند:
گام ۱: مجموع ارقام عدد را به دست آور.

گام ۲: اگر مجموع ارقام کمتر از ۱۰ نیست به گام ۱ برو در غیر این صورت عدد را یادداشت کن.

مثلا برای عدد ۴۸۳ او در نهایت عدد ۶ را یادداشت می‌کند؛ زیرا در گام اول مجموع ارقام عدد ۴۸۳ برابر با ۱۵ است. چون این عدد کوچکتر از ۱۰ نیست، دوباره گام ۱ را برای عدد ۱۵ تکرار می‌کند. این بار مجموع ارقام کوچکتر از ۱۰ هست. پس عدد ۶ را یادداشت می‌کند.

$$۴ + ۸ + ۳ = ۱۵ \quad \rightarrow \quad ۱ + ۵ = ۶$$

اگر نورا این بازی را برای اعداد کوچکتر یا مساوی ۱۴۰۳ انجام داده باشد در نهایت، کدام عدد کمتر یادداشت شده است؟

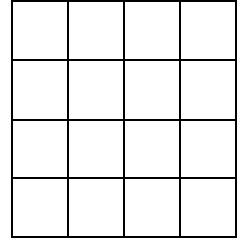
۲

یک جفت عدد طبیعی بزرگتر از یک و متمایز را «دوقلوی خوشحال» گوییم هرگاه حاصلضرب آن‌ها مربع کامل باشد. حاصل ضرب هر دوقلوی خوشحال را یک «عدد شاد» می‌گوییم.
الف) آیا مجموعه همه اعداد شاد، متناهی است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

ب) چند دوقلوی خوشحال وجود دارد که اعداد شاد نظیر آن‌ها از ۲۲۲ کوچکتر باشد؟

۳

یک «مربع جادویی»، مربعی است که در هر خانه آن یک عدد وجود دارد و مجموع عددهای هر سطر، هر ستون و هر دو قطر برابر است. آیا می‌توان با همهی اعداد اول کمتر از ۵۵، یک مربع جادویی 4×4 تشکیل داد؟

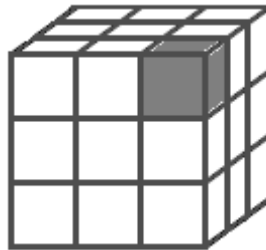


۴

می‌خواهیم با یک مکعب مستطیل به شکل زیر و ۲۴ مکعب سفید، یک مکعب بزرگ درست کنیم.

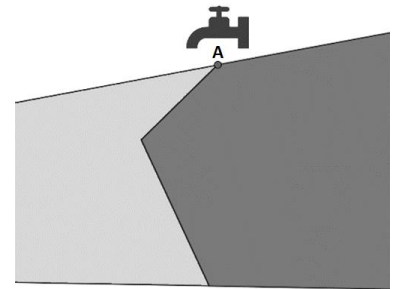


در شکل‌های زیر یک طرح ساخته شده را می‌بینید. حساب کنید چند طرح مختلف دیگر می‌توان ساخت به گونه‌ای که هیچ یک از این طرح‌ها با چرخاندن قابل تبدیل به یکدیگر نباشند (طرح‌های مورد نظر را رسم کنید).



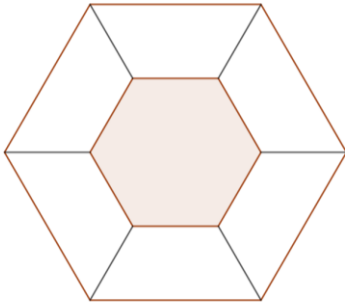
۵

در شکل زیر زمین دو کشاورز را که به وسیله یک خط شکسته از هم جدا شده است، می‌بینید. منبع آبی روی مرز برای هر دو زمین قابل استفاده است که در شکل با نقطه A نشان داده شده است. کشاورزان قصد دارند به جای این مرز، یک مرز جدید بدون شکستگی ایجاد کنند تا کارشان راحت‌تر شود. بدیهی است که در این مرزبندی جدید، هر دو می‌خواهند کماکان به منبع آب دسترسی داشته باشند و مساحت زمین‌هایشان حفظ شود. چگونه می‌توان این مرزبندی را انجام داد؟ (استدلال خود را به طور کامل بنویسید).



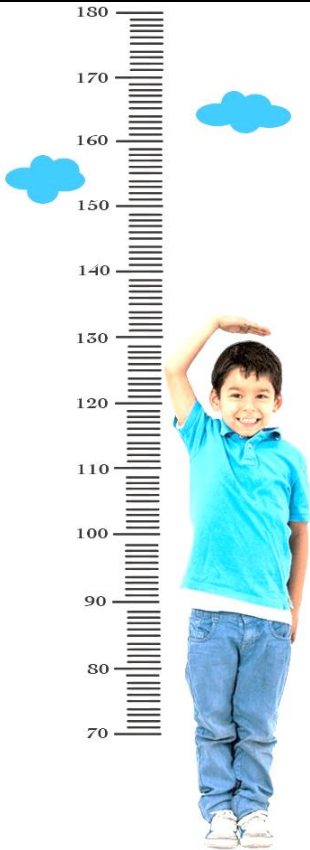
در شکل زیر یک شش ضلعی توسط شش تا دوزنقه احاطه شده است. می‌دانیم عدد نوشته شده در یکی از دوزنقه‌ها ۱ است و عدد نوشته شده در شش ضلعی وسط یک عدد طبیعی است. (همه حالت‌های مربوط به) اعداد پنج دوزنقه دیگر را به دست آورید به طوری که

- ۱- عدد هر دوزنقه از حاصلضرب اعداد دوزنقه‌های کناری‌اش به دست آمده باشد.
- ۲- عدد مربوط به شش ضلعی وسط برابر باشد با مجموع اعداد دوزنقه‌ها.



با یک مقوا به طول و عرض ۲۰ و ۱۵ سانتی‌متر می‌توان دو استوانه متفاوت درست کرد. یک استوانه دراز و لاغر و یک استوانه کوتاه و چاق. نسبت حجم این دو استوانه را بیابید.

در حالت کلی اگر بخواهیم مساحت مقوایمان را حفظ کنیم، آیا اعداد بهتری برای طول و عرض مقوا می‌توان یافت که حجم استوانه بیشتر شود؟ (در مورد انتخاب خود توضیح دهید.)



برای ثبت اطلاعات اعضای یک باشگاه ورزشی، قد افرادی که در نوبت صبح و بعدازظهر یک روز جمعه در این باشگاه حضور داشتند، اندازه‌گیری شد. میانگین قد پسران ۱۶۰ سانتی‌متر و میانگین قد دختران ۱۵۰ سانتی‌متر بود. النا با ۱۸۰ سانتی‌متر، قدبلندترین عضو و سامیار با ۱۳۰ سانتی‌متر، قدکوتاهترین عضو حاضر در این باشگاه بود.

آن روز دو نفر از اعضاء غایب بودند، اما هفته بعد قد آنها هم اندازه‌گیری و میانگین دوباره حساب شد. به طور شگفت‌آوری میانگین قد دختران و میانگین قد پسران نسبت به هفته قبل تغییر نکرد. الف) آیا ممکن است هر دو عضو غایب دختر بوده باشند؟ اگر پاسخ شما مثبت است، در مورد قد آن دو دختر چه می‌توانید بگویید؟

ب) آیا ممکن است یکی از غایبین دختر و دیگری پسر بوده باشد؟ اگر بله، در مورد قد آن دو چه می‌توانید بگویید؟

پ) آیا ممکن است هر دو دانش‌آموز غایب قد یکسان داشته باشند؟

ت) آیا ممکن است پس از احتساب قد آن دو عضو غائب، میانگین قد همه اعضاء تغییری نکند؟

ث) آیا امکان دارد سامیار باز هم کوتاه‌ترین عضو باشد؟