

# رفت و برگشت از طریق کانال



## دور مقدماتی ای-لیمپیاد، ۱۰ آذر ۱۴۰۲

ای-لیمپیاد (A-lympiad) ریاضی ابتکاری از سوی مؤسسه فرودنتال در دانشگاه اوترخت است. کمیته ای-لیمپیاد مسئول سازمان دهی و طراحی تکالیف این مسابقه است. این کمیته شامل افراد زیر می باشد:

**Marcel Daems**

Gymnasium Sorghvliet, Den Hague

**Eric van Dijk**

Lorentz Casimir Lyceum, Eindhoven

**Tom Goris**

Fontys Teacher Training, Tilburg

**Dédé de Haan**

Freudenthal Instituut, Utrecht

**Senta Haas**

Städtisches Gymnasium Hennef, Hennef,  
Germany

**Kim Kaspers**

Murmellius Gymnasium, Alkmaar

**Johan van de Leur**

Mathematisch Instituut, Utrecht University

**Ruud Stolwijk**

CITO, Arnhem; Waldorf school Zutphen VO,  
Zutphen

**Monica Wijers**

Freudenthal Instituut, Utrecht

Secretariat:

**Mariozee Wintermans**

Freudenthal Instituut, Utrecht

## راهنمای مسائل دور مقدماتی ای-لیمپیاد ریاضی ۱۴۰۲

این مرحله از مسابقه‌ی ای-لیمپیاد شامل ۹ تکلیف مقدماتی و ۲ تکلیف نهایی است. همه‌ی اطلاعات و بینش به دست آمده در ۹ تکلیف اول می‌توانند (و باید) در تکالیف نهایی استفاده شوند.

### توصیه‌های کلی برای کار کردن روی این مسائل:

- ابتدا متن همه‌ی تکالیف را بخوانید تا دقیقاً بدانید چه کارهایی باید انجام دهید.
- ممکن است لازم باشد برای تکالیف فرضیاتی اضافی در نظر بگیرید. توضیح و توجیه روشنی برای فرضیاتتان ارائه دهید.
- حواستان به زمانی که برای ۹ تکلیف اول صرف می‌کنید، باشد. زمان زیادی را برای تکالیف نهایی باقی بگذارید.
- اگر کارها را بین خودتان تقسیم می‌کنید، پس از انجام هر تکلیف نتایج را با یکدیگر در میان بگذارید.
- اگر در حین انجام تکالیف در رویکرد، روش یا روند بررسی‌تان تغییراتی دادید حتماً در گزارش خود این تغییرات را نوشته و دلایل ایجاد تغییرات را شرح دهید.
- فهرستی از منابع (اینترنتی) که استفاده کردید، بیاورید.

### آنچه تحویل می‌دهید:

- ✓ ۲ تکلیف نهایی
- ✓ ۹ تکلیف مقدماتی، به عنوان پیوست

### داوری:

این‌ها بخشی از نکاتی است که داوران در نظر می‌گیرند:

- واضح و منطقی بودن پاسخ تکلیف نهایی،
- میزان کامل بودن پاسخ‌ها،
- استفاده از ریاضیات،
- استدلال‌ها و توجیه انتخاب‌های انجام شده،
- عمق و دقت پاسخ‌ها،
- نحوه آرایه: قالب و ظاهر، انسجام، خوانایی، ساختار و چگونگی استفاده و به کارگیری پیوست‌ها و ...
- خلاقیت (ریاضی) در بسط دادن مسائل.

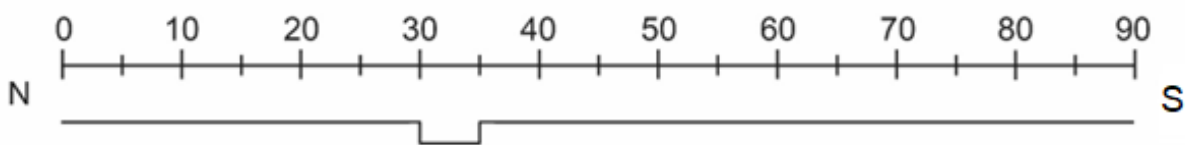
خوش بگذره و موفق باشید!

## معرفی مسئله

کانال شمال-جنوب در همسایگی آمبرهاون قرار دارد. این کانال به طول ۹۰ کیلومتر و عرض ۱۰۰ متر، شریان مهمی برای تجارت بین المللی با آمبرهاون است. در امتداد این کانال چندین شهر و روستا وجود دارد. این کانال یک اتصال مهم برای کشتی‌های باری در هر دو جهت (رفت و برگشت) است.

کشتی‌های باری در سال‌های اخیر بسیار بزرگ‌تر شده‌اند: بیشتر کشتی‌های باری که در کانال حرکت می‌کنند ۳۰۰ متر طول و ۶۰ متر عرض دارند. در این تکلیف ما کشتی‌ها را به این اندازه فرض می‌کنیم. علاوه بر این، فرض می‌کنیم که همه کشتی‌ها با سرعت ۱۵ کیلومتر در ساعت حرکت می‌کنند.

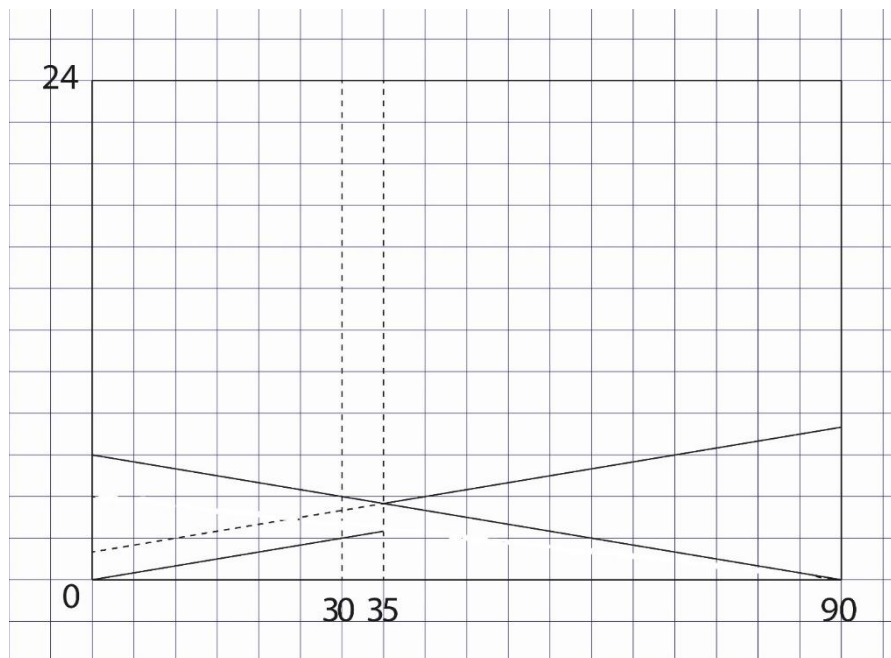
کانال شمال-جنوب یک گذرگاه عبور دارد که کشتی‌ها در آن جا می‌توانند از کنار هم عبور کنند. این گذرگاه ۵ کیلومتر طول و ۵۰ متر عرض دارد. در زیر، طرحی (نه با مقیاس دقیق) از کانال و موقعیت گذرگاه عبور را مشاهده می‌کنید.



## تکالیف مقدماتی: کشتی‌های تک

۱. ساعت ۵ صبح یک کشتی از سمت شمال به ابتدای کانال می‌رسد. در صورت نبود ترافیک، کشتی تا چه زمانی از کانال عبور می‌کند؟
۲. دو کشتی ساعت ۵:۰۰ صبح از شمال و جنوب حرکت می‌کنند. بنابراین این کشتی‌ها باید از کنار یکدیگر عبور کنند و این فقط در یک مکان قابل انجام است.  
الف) حساب کنید تا چه زمانی هر دو کشتی از کل کانال عبور کرده‌اند.  
ب) مشخص کنید کدام کشتی باید در گذرگاه عبور در طول مسیر منتظر بماند و همچنین این انتظار چقدر طول می‌کشد.

در زیر یک نمودار کشتی‌رانی را مشاهده می‌کنید که در آن مسیر کانال دو کشتی با خطوط غیر خط‌چین نشان داده شده است. می‌بینید که کشتی‌ای که از جنوب به شمال حرکت می‌کند، در طول مسیر توقفی ندارد. اما کشتی‌ای که از شمال به جنوب می‌رود، باید در گذرگاه عبور منتظر بماند. در این نمودار کشتی‌رانی، یک خط‌چین مورب نیز مشاهده می‌کنید.



۳. معنی خط‌چین مورب را توضیح دهید. توضیحاتان را با تعیین اطلاعاتی که هر دو محور نشان می‌دهند، شروع کنید.
۴. بررسی کنید کشتی‌ای که از شمال راه می‌افتد، چند دقیقه بعد می‌تواند حرکت کند تا مجبور نباشد در طول مسیر توقف کند.
۵. توضیح دهید چرا اگر هر ساعت یک کشتی از شمال حرکت کند، عبور و مرور راحت نخواهد بود.

## تکالیف میانی: کشتی‌ها و کاروان‌ها

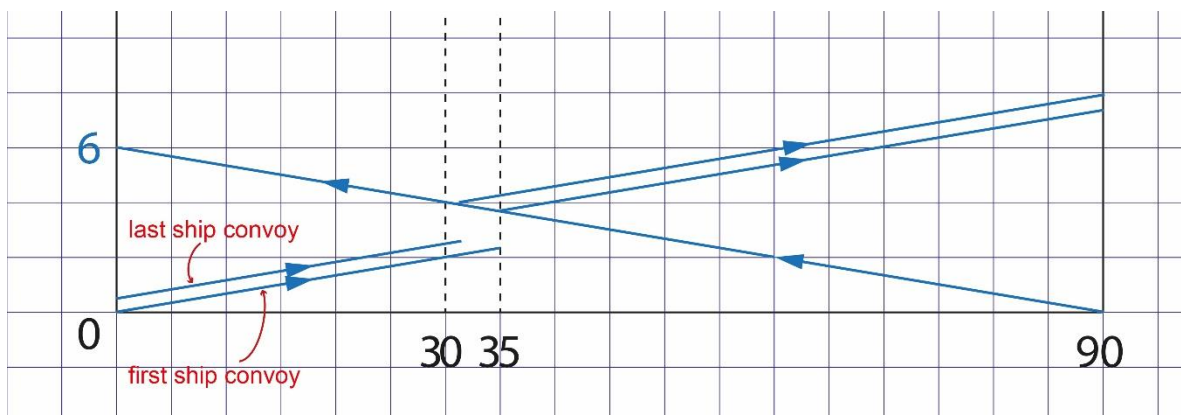
برای اطمینان از اینکه کانال می‌تواند در هر دو جهت به طور مناسبی استفاده شود، کشتی‌ها به صورت گروهی از کانال عبور می‌کنند. به هر گروه، یک کاروان می‌گویند. در یک کاروان، گروهی از کشتی‌ها با همان سرعت و با یک فاصله‌ی مشخص حرکت می‌کنند.

نکته مثبت در مورد حرکت به صورت کاروانی این است که می‌توان سفر را به خوبی برنامه‌ریزی کرد: برنامه‌ریزی سفر برای کشتی‌های تکی، بسیار پیچیده‌تر است و زمان بیشتری می‌برد. روشن است که در سفر کاروانی، مدتی طول می‌کشد تا کل گروه عبور کنند.

ساعت ۰۰:۰۰ یک کاروان با ۶ کشتی، از شمال به ابتدای کانال می‌رسد. در همان زمان، یک کشتی از جنوب حرکت می‌کند.

۶. آخرین کشتی کاروان چه ساعتی وارد کانال می‌شود؟ دقیقاً مشخص کنید که از کدام فرض(ها) استفاده می‌کنید.

نمودار زیر نشان می‌دهد که آن تک کشتی که از جنوب می‌آید بدون توقف به سمت شمال حرکت می‌کند، در حالی که کاروان (که از شمال به جنوب حرکت می‌کند) از گذرگاه عبور استفاده کرده است.



۷. آیا فاصله دوبره‌دو در نمودار کشتی‌رانی با فاصله دوبره‌دویی که در تمرین ۶ انتخاب کرده‌اید مطابقت دارد؟

قوانین زیر برای منطقه عبور اعمال می‌شود:

- در گذرگاه عبور، کشتی‌ها می‌توانند به آرامی حرکت کنند یا ساکن باشند.
- هر کشتی تا زمانی که همه کشتی‌های کاروان وارد گذرگاه عبور نشده‌اند، باید در گذرگاه منتظر بماند.
- هر کشتی باید تا وقتی که دیگر هیچ کشتی‌ای در جهت مخالف از کانال عبور نمی‌کند در گذرگاه منتظر بماند.

۸. با استفاده از نمودار کشتی‌رانی، بررسی کنید که کل کاروان در چه زمانی از کل کانال عبور کرده است. به طور واضح سفر هر کشتی کاروان را توضیح دهید، به خصوص قسمتی که در گذرگاه عبور است.

۹. در ساعت ۰۰:۰۰ دو کاروان، هر یک شامل ده کشتی، حرکت می‌کنند: یک کاروان از شمال و دیگری از جنوب. سفر هر دو کاروان را تا حد امکان دقیق توصیف کنید. سفر هر دو کاروان را در یک نمودار کشتی‌رانی نمایش دهید (برای این کار از کاربرگ استفاده کنید).

## تکالیف نهایی

به دلیل محدودیت‌های عبور و مرور، بخش‌های بزرگی از کانال در زمان‌های خاصی خالی است: در آن زمان هیچ کشتی در حال حرکت نیست. بنابراین سوال این است که چگونه می‌توانید از ظرفیت کانال استفاده بهتری کنید.

۱. بررسی کنید حداکثر چه تعداد کشتی می‌توانند در ۲۴ ساعت از کانال عبور کنند (از S به N و از N به S). برای استفاده بهینه از کانال یک برنامه یا نمودار کشتی‌رانی تهیه کنید. در هر حالت، موارد زیر را در نظر بگیرید:

- تعداد کاروان‌ها
- تعداد کشتی در هر کاروان
- زمان‌هایی که از گذرگاه عبور، می‌گذرند.

افزایش ظرفیت کانال مسلماً باعث می‌شود کشتی‌های بیشتری در هر ۲۴ ساعت از کانال عبور کنند. به عنوان مثال، می‌توانید گزینه‌های زیر را در نظر بگیرید - البته پیشنهادات شما نیز مورد استقبال قرار می‌گیرد:

- دو برابر کردن طول گذرگاه عبور موجود (به طوری که مثلاً امکان عبور کاروان‌های طولانی‌تری باشد).
- ایجاد گذرگاه عبور دوم به طول ۵ کیلومتر بین ۵۵ تا ۶۰ کیلومتر.
- ایجاد گذرگاه عبور دوم در مکانی دیگر
- ...

۲. در مورد این که کدام گزینه بهترین است، توصیه‌های مستدل ارائه دهید. این کار را با بررسی این مورد انجام دهید که کدام گزینه به بیشترین تعداد کاروان اجازه می‌دهد در هر ۲۴ ساعت کانال را طی کنند.