شماره گروه:

43^{th} International Mathematics
Tournament of Towns
Junior O level paper
Spring 2022

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح عادی ۱
اسفند ۱۴۰۰

این سوالات برای گروه‌هایی است که هر سه نفر کلاس هشتم و نهم هستند.
نتیجه براساس سه سوالی که از آن‌ها بیشترین امتیاز را گرفته اید، محاسبه می‌شود.

۱. دو دوست در طول یک جاده مستقیم به سمت همدیگر حرکت می‌کنند. هر دو سرعتی ثابت دارند اما یکی از آن‌ها سریع‌تر از دیگری حرکت می‌کند. در یک لحظه هر کدام از آن‌ها سگش را رها می‌کند تا آزادانه به سمت جلو بدود. سرعت هر دو سگ یکسان و ثابت است. هر سگ به شخص دیگر می‌رسد و سپس به سمت صاحبش برمی‌گردد. کدام سگ زودتر به صاحبش می‌رسد، سگی که صاحبش سریع‌تر حرکت می‌کند یا سگی که صاحبش کندتر حرکت می‌کند؟ [۳ امتیاز]

۲. پروانه یک عدد صحیح مثبت دلخواه را انتخاب می‌کند، آن را در ۵ ضرب می‌کند، حاصل را دوباره در ۵ ضرب می‌کند و سپس حاصل را دوباره در ۵ ضرب می‌کند و الی آخر. آیا این درست است که از یک جا به بعد همه اعدادی که پروانه بدست می‌آورد حداقل یک رقم ۵ دارند؟ [۴ امتیاز]

۳. روباه و پینوکیو یک درخت در سرزمین عجایب کاشته‌اند که ۱۱ سکه طلا داده است. می‌دانیم که دقیقاً چهار تا از سکه‌ها تقلبی است. همه سکه‌های واقعی هم‌وزن هستند، همه سکه‌های تقلبی نیز هم‌وزن اما سبک‌تر هستند. روباه و پینوکیو سکه‌ها را جمع کرده‌اند و می‌خواهند بین خودشان تقسیم کنند. روباه قصد دارد ۴ سکه به پینوکیو بدهد، اما پینوکیو می‌خواهد چک کند که همه آن‌ها واقعی هستند یا نه. آیا پینوکیو می‌تواند با تنها دو بار وزن کردن روی یک ترازوی متعادل بدون وزنه این کار را انجام دهد؟ [۵ امتیاز]

۴. یک مربع $ABCD$ در نظر بگیرید. نقطه P روی قطر AC انتخاب شده است. فرض کنید H نقطه برخورد ارتفاع‌های مثلث APD باشد، M وسط ضلع AD و N وسط ضلع CD باشد. ثابت کنید PN بر MH عمود است. [۵ امتیاز]

۵. یک مستطیل ۳×۱ را یک ترومینو می‌گوییم. آرزو و بهرام به اتاق‌های مجزا می‌روند و هر کدام یک صفحه ۲۱×۲۰ را به ترومینوها تقسیم می‌کنند. سپس نتیجه را مقایسه می‌کنند و تعداد ترومینوهایی که در هر دو تقسیم یکسان هستند را می‌شمارند. سپس آرزو به بهرام به همان تعداد اسکناس یک دلاری می‌دهد. بیشترین پولی که بهرام می‌تواند برای خودش، صرف نظر از نحوه بازی آرزو، تضمین کند، چقدر است؟ [۶ امتیاز]

شماره گروه:

43^{th} International Mathematics
Tournament of Towns
Junior O level paper
Spring 2022

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح عادی ۱
اسفند ۱۴۰۰

(The result is computed from the three problems with the highest scores.)

points	problems
3	1. Two friends walked towards each other along a straight road. Each had a constant speed but one was faster than the other. At one moment each friend released his dog to run freely forward, the speed of each dog is the same and constant. Each dog reached the other person and then returned to its owner. Which dog returned to its owner the first, of the person who walks fast or who walks slow?
4	2. Peter picked an arbitrary positive integer, multiplied it by 5, multiplied the result by 5, then multiplied the result by 5 again and so on. Is it true that from some moment all the numbers that Peter obtains contain 5 in their decimal representation?
5	3. The Fox and Pinocchio have grown a tree on the Field of Miracles with 11 golden coins. It is known that exactly 4 of them are counterfeit. All the real coins weigh the same, the counterfeit coins also weigh the same but are lighter. The Fox and Pinocchio have collected the coins and wish to divide them. The Fox is going to give 4 coins to Pinocchio, but Pinocchio wants to check whether they all are real. Can he check this using two weighings on a balance scale with no weights?
5	4. Consider a square $ABCD$. A point P was selected on its diagonal AC. Let H be the orthocenter of the triangle APD, let M be the midpoint of AD and N be the midpoint of CD. Prove that PN is orthogonal to MH.
6	5. Let us call a 1×3 rectangle a tromino. Alice and Bob go to different rooms, and each divides a 20×21 board into trominos. Then they compare the results, compute how many trominos are the same in both splittings, and Alice pays Bob that number of dollars. What is the maximal amount Bob may guarantee to himself no matter how Alice plays?

شماره گروه:

۲

43th International Mathematics
Tournament of Towns
Senior O level paper
Spring 2022

خانه ریاضیات اصفهان

مسابقه سطح عادی ۲

اسفند ۱۴۰۰

این سوالات برای گروه‌هایی است که حداقل یک نفر کلاس دهم و یازدهم هستند.

نتیجه براساس سه سوالی که از آن‌ها بیشترین امتیاز را گرفته‌اید، محاسبه می‌شود.

۱. پروانه یک عدد صحیح مثبت انتخاب می‌کند، آن را در ۵ ضرب می‌کند، حاصل را دوباره در ۵ ضرب می‌کند و سپس حاصل را دوباره در ۵ ضرب می‌کند و الی آخر. نهایتاً k ضرب انجام می‌شود. می‌دانیم که در عدد اولیه و هیچ‌کدام از k عدد بدست آمده رقم ۷ وجود ندارد. ثابت کنید یک عدد صحیح مثبت وجود دارد به طوری که وقتی k بار در عدد ۲ ضرب می‌شود، نه در عدد اولیه و نه در هیچ‌کدام از k عدد حاصل رقم ۷ وجود ندارد. [۴ امتیاز]

۲. روباه و پینوکیو یک درخت در سرزمین عجایب کاشته‌اند که ۸ سکه طلا داده است. می‌دانیم که دقیقاً سه تا از سکه‌ها تقلبی است. همه سکه‌های واقعی هم‌وزن هستند، همه سکه‌های تقلبی نیز هم‌وزن اما سبک‌تر هستند. روباه و پینوکیو سکه‌ها را جمع کرده‌اند و می‌خواهند بین خودشان تقسیم کنند. روباه قصد دارد ۳ سکه به پینوکیو بدهد، اما پینوکیو می‌خواهد چک کند که همه آن‌ها واقعی هستند یا نه. آیا پینوکیو می‌تواند با تنها دو بار وزن کردن روی یک ترازوی متعادل بدون وزنه این کار را انجام دهد؟ [۴ امتیاز]

۳. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد. یک دنباله $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ را جالب می‌گوییم اگر برای هر عدد $i = ۱, ۲, \dots, n$، یا $a_i = i$ یا $a_i = i + ۱$. یک دنباله جالب را زوج می‌گوییم اگر جمع اعضایش زوج باشد و در غیر اینصورت آن را فرد می‌گوییم. آرمیتا همه اعداد در هر دنباله جالب فرد را در هم ضرب کرده و حاصل را در دفترش نوشته است. بابک همین کار را برای هر دنباله جالب زوج انجام داده است. جمع اعداد در کدام دفتر بیشتر است و چقدر بیشتر است؟ (جواب ممکن است به n بستگی داشته باشد.) [۵ امتیاز]

۴. یک مستطیل ۳×۱ را یک ترومینو می‌گوییم. آرزو و بهرام به اتاق‌های مجزا می‌روند و هر کدام یک صفحه ۲۱×۲۰ را به ترومینوها تقسیم می‌کنند. سپس نتیجه را مقایسه می‌کنند و تعداد ترومینوهایی که در هر دو تقسیم یکسان هستند را می‌شمارند. سپس آرزو به بهرام به همان تعداد اسکناس یک دلاری می‌دهد. بیشترین پولی که بهرام می‌تواند برای خودش، صرف نظر از نحوه بازی آرزو، تضمین کند، چقدر است؟ [۵ امتیاز]

۵. چهارضلعی $ABCD$ درون یک دایره ω به مرکز O محاط شده است. دایره محیطی مثلث AOC خطوط AB، BC، CD و DA را برای دومین بار به ترتیب در نقاط M، N، K و L قطع می‌کند. ثابت کنید که خطوط MN، KL و مماس‌ها بر ω در نقاط A و C همگی بر یک دایره مماس اند. [۶ امتیاز]

شماره گروه:

43^{th} International Mathematics
Tournament of Towns
Senior O level paper
Spring 2022

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح عادی ۲
اسفند ۱۴۰۰

(The result is computed from the three problems with the highest scores.)

points	problems
4	1. Peter picked a positive integer, multiplied it by 5, multiplied the result by 5, then multiplied the result by 5 again and so on. Altogether k multiplications were made. It so happened that the decimal representations of the original number and of all k resulting numbers in this sequence do not contain digit 7. Prove that there exists a positive integer such that it can be multiplied k times by 2 so that no number in this sequence contains digit 7.
4	2. The Fox and Pinocchio have grown a tree on the Field of Miracles with 8 golden coins. It is known that exactly 3 of them are counterfeit. All the real coins weigh the same, the counterfeit coins also weigh the same but are lighter. The Fox and Pinocchio have collected the coins and wish to divide them. The Fox is going to give 3 coins to Pinocchio, but Pinocchio wants to check whether they all are real. Can he check this using two weighings on a balance scale with no weights?
5	3. Let n be a positive integer. Let us call a sequence $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *interesting* if for any $i = 1, 2, \ldots, n$ either $a_i = i$ or $a_i = i + 1$. Let us call an interesting sequence *even* if the sum of its members is even, and *odd* otherwise. Alice has multiplied all numbers in each odd interesting sequence and has written the result in her notebook. Bob, in his notebook, has done the same for each even interesting sequence. In which notebook is the sum of the numbers greater and by how much? (The answer may depend on n.)
5	4. Let us call a 1×3 rectangle a tromino. Alice and Bob go to different rooms, and each divides a 20×21 board into trominos. Then they compare the results, compute how many trominos are the same in both splittings, and Alice pays Bob that number of dollars. What is the maximal amount Bob may guarantee to himself no matter how Alice plays?
6	5. A quadrilateral $ABCD$ is inscribed into a circle ω with center O. The circumcircle of the triangle AOC intersects the lines AB, BC, CD and DA the second time at the points M, N, K and L respectively. Prove that the lines MN, KL and the tangents to ω at the points A è C all touch the same circle.