شماره گروه:

۱

44^{th} International Mathematics
Tournament of Towns
Junior O level paper
Spring 2023

خانه ریاضیات اصفهان

مسابقه سطح عادی ۱

اسفند ۱۴۰۱

خانه ریاضیات

سوالات برای گروه‌هایی است که هر سه نفر کلاس هشتم و نهم هستند. نتیجه براساس سه سوالی که از آن‌ها بیشترین امتیاز را گرفته اید، محاسبه می‌شود.

۱. N کارمند شلخته در یک دفتر هستند. هرکدام مقداری زباله روی میز دارند. هربار یکی از کارمندها دفتر را برای صرف ناهار ترک می‌کند (بعد از بازگشت نفر قبلی). در این لحظه همه کارمندهای دیگر نصف زباله میز خودشان را روی میز فردی که برای ناهار رفته است می‌ریزند. آیا ممکن است که بعد از اینکه همه آن‌ها ناهارشان را خوردند، مقدار زباله روی میز هر فرد برابر با مقدار قبل از ناهار باشد، اگر:

الف) $N = ۲$؟ [۱ امتیاز]

ب) $N = ۱۰$؟ [۳ امتیاز]

۲. میانه‌های BK و CN مثلث ABC یکدیگر را در نقطه M قطع می‌کنند. چهارضلعی $ANMK$ را در نظر بگیرید. حداکثر چند ضلع این چهارضلعی طول یک دارد. [۴ امتیاز]

۳. تعداد ۲۰۲۳ تاس روی میز است. با پرداخت ۱ دلار می‌توانیم یک تاس را برداریم و روی یکی از چهار وجهش (بجز وجه بالا و پایین) قرار دهیم. با حداقل چند دلار می‌توانیم تضمین کنیم که همه تاس‌ها تعداد نقطه یکسانی روی وجه بالایی شان داشته باشند؟ (تعداد نقطه‌ها روی هر وجه تاس برابر ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ یا ۶ است. مجموع نقطه‌ها روی دو وجه مقابل همواره برابر ۷ است.) [۵ امتیاز]

۴. برای هر عدد دلخواه x مجموع زیر را در نظر بگیرید.

$$Q(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{۲} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{۳} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{۴} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{x}{۱۰۰۰۰} \right\rfloor$$

تفاضل $Q(۲۰۲۳) - Q(۲۰۲۲)$ را پیدا کنید. (منظور از $\lfloor x \rfloor$ جزء صحیح عدد x یعنی بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x است.) [۵ امتیاز]

۵. در هر خانه از یک جدول ۵×۵ یک سکه قرار دارد. همه سکه‌ها ظاهر یکسان دارند. دو تا از سکه‌ها تقلبی هستند و وزن یکسانی دارند. سکه‌های اصلی سنگین‌تر از سکه‌های تقلبی اند و وزن یکسانی دارند. دو سکه تقلبی در دو خانه هستند که فقط یک راس مشترک دارند. آیا ممکن است با یک بار وزن کردن روی ترازوی بدون وزنه، N تا سکه اصلی را پیدا کنیم که

الف) $N = ۱۳$ [۲ امتیاز]

ب) $N = ۱۵$ [۳ امتیاز]

ج) $N = ۱۷$ [۲ امتیاز]

شماره گروه:

44^{th} International Mathematics
Tournament of Towns
Junior O level paper
Spring 2023

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح عادی ۱
اسفند ۱۴۰۱

(The result is computed from the three problems with the highest scores.)

points	problems
	1. There are N mess-loving clerks in the office. Each of them has some rubbish on the desk. The mess-loving clerks leave the office for lunch one at a time (after return of the preceding one). At that moment all those remaining put half of rubbish from their desks on the desk of the one who left. Can it so happen that after all of them have had lunch the amount of rubbish at the desk of each one will be the same as before lunch if:
1	a) $N = 2$;
3	b) $N = 10$?
4	2. Medians BK and CN of triangle ABC intersect at point M. Consider quadrilateral $ANMK$ and find the maximum possible number of its sides having length 1.
5	3. There are 2023 dice on the table. For 1 dollar, one can pick any dice and put it back on any of its four (other than top or bottom) side faces. How many dollars at a minimum will guarantee that all the dice have been repositioned to show equal number of dots on top faces? (The number of dots on faces of each cube dice equals 1, 2, 3, 4, 5 and 6. The total number of dots on two opposite faces always equals 7.)
5	4. Consider the sum $$Q(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{x}{10000} \right\rfloor$$ for an arbitrary x. Find the difference $Q(2023) - Q(2022)$. (Here $\lfloor x \rfloor$ denotes the integer part of x, that is the maximum integer not exceeding x.)
	5. There is a single coin on each square of a 5×5 board. All the coins look the same. Two of them are fakes and have equal weight. Genuine coins are heavier than fake ones and also weigh the same. The fake coins are on the squares sharing just one vertice. Is it possible to determine for sure:
2	a) 13 genuine coins;
3	b) 15 genuine coins;
2	c) 17 genuine coins
	in a single weighing on a balance with no unit weights?

شماره گروه:

44^{th} International Mathematics
Tournament of Towns
Senior O level paper
Spring 2023

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح عادی ۲
اسفند ۱۴۰۱

این سوالات برای گروه‌هایی است که حداقل یک نفر کلاس دهم و یازدهم هستند.

نتیجه براساس سه سوالی که از آن‌ها بیشترین امتیاز را گرفته‌اید، محاسبه می‌شود.

۱. تعداد ۲۰۲۳ تاس روی میز است. با پرداخت ۱ دلار می‌توانیم یک تاس را برداریم و روی یکی از چهار وجهش (بجز وجه بالا و پایین) قرار دهیم. با حداقل چند دلار می‌توانیم تضمین کنیم که همه تاس‌ها تعداد نقطه یکسانی روی وجه بالایی شان داشته باشند؟ (تعداد نقطه‌ها روی هر وجه تاس برابر ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ یا ۶ است. مجموع نقطه‌ها روی دو وجه مقابل همواره برابر ۷ است.) [۴ امتیاز]

۲. یک عدد طبیعی n داده شده است. برای هر عدد دلخواه x مجموع زیر را در نظر بگیرید.

$$Q(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{۲} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{۳} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{۴} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{x}{۱۰^n} \right\rfloor$$

تفاضل $Q(۱۰^n) - Q(۱۰^n - ۱)$ را پیدا کنید. (منظور از $\lfloor x \rfloor$ جزء صحیح عدد x یعنی بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x است.) [۴ امتیاز]

۳. فرض کنید I مرکز دایره محاطی مثلث ABC و N پای نیمساز زاویه B باشد. خط مماس بر دایره محیطی مثلث AIN در راس A و خط مماس بر دایره محیطی مثلث CIN در راس C یکدیگر را در نقطه D قطع می‌کنند. ثابت کنید که خطوط AC و DI متعامدند. [۵ امتیاز]

۴. فرض کنید $a_۱, a_۲, a_۳, \ldots$ و $b_۱, b_۲, b_۳, \ldots$ دو تصاعد حسابی صعودی نامتناهی باشند. همه جملات اعداد مثبت هستند. می‌دانیم برای هر k، نسبت a_k/b_k یک عدد صحیح است. آیا درست است که این نسبت به k بستگی ندارد؟ [۵ امتیاز]

۵. فاصله بین هر دو نقطه از ۵ نقطه داده شده بیشتر از دو است. آیا این درست است که فاصله بین یک جفت از این نقاط بیشتر از ۳ است، اگر همه این ۵ نقطه در

الف) صفحه باشند. [۳ امتیاز]

ب) فضای سه بعدی باشند. [۳ امتیاز]

شماره گروه:

44th International Mathematics
Tournament of Towns
Senior O level paper
Spring 2023

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح عادی ۲
اسفند ۱۴۰۱

(The result is computed from the three problems with the highest scores.)

points problems

4 1. There are 2023 dice on the table. For 1 dollar, one can pick any dice and put it back on any of its four (other than top or bottom) side faces. How many dollars at a minimum will guarantee that all the dice have been repositioned to show equal number of dots on top faces? (The number of dots on faces of each cube dice equals 1, 2, 3, 4, 5 and 6. The total number of dots on two opposite faces always equals 7.)

4 2. À positive integer n is given. Consider the sum

$$Q(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{x}{10^n} \right\rfloor$$

for an arbitrary x. Find the difference $Q(10^n) - Q(10^n - 1)$. (Here $\lfloor x \rfloor$ denotes the integer part of x, that is the maximum integer not exceeding x.)

5 3. Let I be the incenter of triangle ABC. Let N be the foot of the bisector of angle B. The tangent line to the circumcircle of triangle AIN at vertice A and the tangent line to the circumcircle of triangle CIN at vertice C intersect at point D. Prove that lines AC and DI are perpendicular.

5 4. Let $a_1, a_2, a_3, \ldots$ and $b_1, b_2, b_3, \ldots$ be infinite increasing arithmetic progressions. Their terms are positive numbers. It is known that the ratio a_k/b_k is an integer for all k. Is it true that this ratio does not depend on k?

5. The distance between any two of the five given points exceeds 2. Is it true that the distance between some two of these points exceeds 3 if these five points are in:

3 a) the plane;

3 b) three-dimensional space?