شماره گروه:

۱A

43^{th} International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper
Spring 2021

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح پیشرفته ۱
فروردین ۱۴۰۱

– برای گروه‌هایی که هر سه نفر کلاس هشتم یا نهم هستند.

– امتیاز هر گروه براساس جمع امتیاز سه سوال با بیشترین نمره بدست می‌آید.

۱. یک مثلث قائم‌الزاویه یک زاویه ۳۰ درجه دارد. ثابت کنید طول یکی از نیمسازها نصف نیمساز دیگر است. [۴ امتیاز]

۲. در یکی از خانه‌های یک جدول ۱۰ × ۱۰ یک باکتری قرار دارد. در حرکت اول، باکتری به یکی از خانه‌هایی که با خانه اول ضلع مجاور دارد، می‌رود و به دو باکتری تقسیم می‌شود (هر دو در یک خانه قرار می‌گیرند). سپس دوباره یکی از باکتری‌های درون جدول به یک خانه با ضلع مجاور می‌رود و به دو باکتری تقسیم می‌شود و این روند تکرار می‌شود. آیا امکان دارد بعد از تعدادی از این حرکات، تعداد باکتری‌های درون همه خانه‌ها برابر باشند؟ [۵ امتیاز]

۳. یک عدد صحیح مثبت را *مبتذل* گوییم اگر همه ارقامش برابر صفر یا یک باشد. فرض کنید دو عدد مبتذل a, b داریم که ضربشان نیز مبتذل است. آیا لزومی دارد که جمع ارقام حاصلضرب ab برابر با ضرب جمع ارقام دو عدد a, b باشد؟ [۷ امتیاز]

۴. اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC اضلاع مثلث‌های $AB'C$ ،$CA'B$ ،$BC'A$ نیز هستند که در بیرون آن ساخته شده‌اند. در شش ضلعی $AB'CA'BC'$ حاصل، هر کدام از زاویه‌های $A'BC'$ ،$C'AB'$ ،$B'CA'$ بزرگتر از ۱۲۰ درجه است و اضلاع در تساوی‌های $AB' = AC'$، $BC' = BA'$ ،$CA' = CB'$ صدق می‌کنند. ثابت کنید که پاره‌خط‌های AB' ،BC' و CA' می‌توانند یک مثلث تشکیل دهند. [۸ امتیاز]

۵. اعداد صحیح ۱ تا ۱۰۰ را با سه رنگ رنگ‌آمیزی کرده‌ایم بطوریکه ۵۰ عدد قرمز، ۲۵ عدد زرد و ۲۵ عدد سبز شده‌اند. اعداد قرمز و زرد را می‌توان به دسته‌های سه تایی تقسیم کرد به طوری که هر دسته دو قرمز و یک زرد داشته باشد و عدد زرد بین دو عدد قرمز باشد (بزرگتر از یک قرمز و کمتر از قرمز دیگر). همین موضوع برای اعداد قرمز و سبز نیز صادق است. آیا لزوماً می‌توان همه ۱۰۰ عدد را به ۲۵ دسته چهارتایی تقسیم کرد بطوری‌که هر دسته چهارتایی شامل دو قرمز، یک زرد و یک سبز باشد و اعداد سبز و زرد بین اعداد قرمز باشند. [۸ امتیاز]

۶. فرض کنید X مجموعه‌ای از اعداد صحیح باشد که به N تصاعد حسابی صعودی مجزا (نامتناهی از هر دو طرف) قابل افراز است و به تعداد کمتری از چنین تصاعدهایی قابل افراز نیست. آیا چنین افرازی به N تصاعد برای هر چنین مجموعه Xای یکتا است، اگر

الف) $N = ۲$، [۴ امتیاز]

ب) $N = ۳$. [۴ امتیاز]

(یک تصاعد حسابی صعودی دنباله‌ای از اعداد است بطوری که اختلاف هر عدد با عدد مجاور سمت چپ یک مقدار ثابت باشد.)

۷. یک ۱۰۰ ضلعی منتظم به تعدادی متوازی‌الاضلاع و دو مثلث تقسیم شده است. ثابت کنید این مثلث‌ها هم‌نهشت هستند. [۱۰ امتیاز]

شماره گروه:

۱A

43^{th} International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper
Spring 2021

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح پیشرفته ۱
فروردین ۱۴۰۱

Grades 8 – 9 (ages 13 – 15)
(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed up.)

points	problems	
4	1.	A right-angled triangle has an angle equal to 30°. Prove that one of the bisectors of the triangle is twice shorter than another one.
5	2.	There is a bacterium in one of the cells of the 10×10 checkered board. At the first move, the bacterium shifts to a cell adjacent by side to the original one, and divides into two bacteria (both stay in the same cell). Then again, one of the bacteria on the board shifts to a cell adjacent by side and divides into two bacteria, and so on. Is it possible that after some number of such moves the number of bacteria in each cell of the board is the same?
7	3.	Let us call a positive integer *pedestrian* if all its decimal digits are equal to 0 or 1. Suppose that the product of some two pedestrian integers also is pedestrian. Is it necessary in this case that the sum of digits of the product equals the product of the sums of digits of the factors?
8	4.	The sides of the regular triangle ABC are also sides of triangles $AB'C$, $CA'B$, $BC'A$ constructed outside it. In the resulting hexagon $AB'CA'BC'$ each of the angles $A'BC'$, $C'AB'$, $B'CA'$ is greater than 120°, and the sides satisfy the equalities $AB' = AC'$, $BC' = BA'$, $CA' = CB'$. Prove that the segments AB', BC', CA' can form a triangle.
8	5.	The positive integers from 1 to 100 are painted into three colors: 50 integers are red, 25 integers are yellow and 25 integers are green. The red and yellow integers can be divided into 25 triples such that each triple includes two red integers and one yellow integer which is greater than one of the red integers and smaller than another one. The similar assertion is valid for the red and green integers. Is it necessarily possible to divide all the 100 integers into 25 quadruples so that each quadruple includes two red integers, one yellow integer and one green integer such that the yellow and the green integer lie between the red ones?
	6.	Let X be a set of integers which can be partitioned into N disjoint increasing arithmetic progressions (infinite in both directions), and cannot be partitioned into a smaller number of such progressions. Is such partition into N progressions unique for every such X if
4	a)	$N = 2$;
4	b)	$N = 3$?
		(An increasing arithmetic progression is a sequence of numbers such that each number exceeds its left neighbor by the same quantity.)
10	7.	A regular 100-gon is dissected into some number of parallelograms and two triangles. Prove that these triangles are equal.

شماره گروه:

۲ A

43th International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper
Spring 2021

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح پیشرفته ۲
فروردین ۱۴۰۱

- **برای گروه‌هایی که حداقل یک نفر کلاس دهم یا یازدهم است.**

-امتیاز هر گروه براساس جمع امتیاز سه سوال با بیشترین نمره بدست می‌آید.

۱. دو دنباله از حروف A و B داده شده که هر دنباله شامل ۱۰۰ حرف است. در هر گام می‌توانیم یکی از این دو کار را انجام دهیم: یا تعداد دلخواهی از حروف یکسان را در هرجای دنباله وارد کنیم (در شروع دنباله یا پایان آن یا هر جای دیگر) یا می‌توانیم هر تعداد حروف یکسان پشت سرهم را از دنباله حذف کنیم. ثابت کنید می‌توان با حداکثر ۱۰۰ گام، دنباله اول را به دنباله دوم تبدیل کرد. [۴ امتیاز]

۲. محیط مثلث ABC برابر یک است. دایره ω بر ضلع BC، بر امتداد ضلع AB در نقطه P و بر امتداد ضلع AC در نقطه Q مماس است. خط راست عبوری از وسط ضلع‌های AB و AC دایره محیطی مثلث APQ را در نقاط X و Y قطع می‌کند. طول پاره‌خط XY چند است؟ [۵ امتیاز]

۳. فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n > ۵$ با ضرایب صحیح و n ریشه صحیح متمایز است. ثابت کنید چندجمله‌ای $P(x) + ۳$ دارای n ریشه حقیقی متمایز است. [۶ امتیاز]

۴. یک ۱۰۰ ضلعی منتظم را به تعدادی متوازی الاضلاع و دو مثلث تقسیم کرده ایم. ثابت کنید این مثلث‌ها هم‌نهشت اند. [۸ امتیاز]

۵. یک عدد صحیح $h > ۱$ داده شده است. یک کسر عادی مثبت را خوب می‌گوییم اگر جمع صورت و مخرج آن برابر h باشد. (منظور از یک کسر عادی کسری است که صورت و مخرج آن عدد صحیح است ولی لزوماً ساده‌شده نیست، مثلاً $\frac{۳}{۲}$ یا $\frac{۶}{۸}$.) عدد صحیح h را *قابل توجه* می‌گوییم، اگر هر کسر عادی مثبت با مخرج کمتر از h را بتوان از طریق جمع یا تفریق کسرهای خوب (نه لزوماً متمایز) بیان کرد. ثابت کنید h قابل توجه است اگر و تنها اگر h اول باشد. [۸ امتیاز]

۶. وسط همه ارتفاع‌های یک چهاروجهی روی کره محاط در آن قرار دارد. آیا این چهاروجهی لزوماً منتظم است؟ [۱۰ امتیاز]

۷. در یک جزیره آفتاب‌پرست‌هایی با ۵ رنگ وجود دارند. اگر یک آفتاب‌پرست، آفتاب‌پرست دیگری را گاز بگیرد، براساس یک قانون رنگ آفتاب‌پرست گاز گرفته شده به یکی از این ۵ رنگ تغییر می‌کند و رنگ جدید فقط به رنگ آفتاب‌پرست گاز گیرنده و گاز گرفته شده بستگی دارد. می‌دانیم که ۲۰۲۳ آفتاپ‌پرست قرمز می‌توانند روی یک دنباله از گاز گرفتن‌ها توافق کنند بطوری که همه آن‌ها نهایتاً آبی شوند. کمترین عدد k چند است که بتوانیم تضمین کنیم که k آفتاب‌پرست قرمز می‌توانند با گاز گرفتن همدیگر آبی شوند؟

(برای مثال، ممکن است قوانین زیر را داشته باشیم: اگر یک آفتاب‌پرست قرمز یک آفتاب‌پرست سبز را گاز بگیرد، گاز گرفته شده آبی می‌شود؛ اگر یک آفتاب‌پرست سبز یک آفتاب‌پرست قرمز را گاز بگیرد، گاز گرفته شده، قرمز باقی می‌ماند، بنابراین ''رنگش به قرمز تغییر می‌کند''؛ اگر یک آفتاب‌پرست قرمز یک آفتاپرست قرمز را گاز بگیرد، گاز گرفته شده زرد می‌شود و الی آخر. قوانین دیگر نیز ممکن هستند.) [۱۲ امتیاز]

Grades 10 – 11 (ages 15 and older)
(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed up.)

points	problems	
4	1.	Given are two sequences of letters A and B, each sequence contains 100 letters. At each step it is possible either to insert an arbitrary number of identical letters into a sequence at any position (maybe at the beginning or at the end), or remove from a sequence an arbitrary number of consecutive identical letters. Prove that it is possible to transform the first sequence into the second one in at most 100 steps.
5	2.	The perimeter of triangle ABC equals 1. The circle ω touches the side BC, the extension of side AB at point P and the extension of side AC at point Q. The line containing the midpoints of sides AB and AC meets the circumcircle of triangle APQ at points X and Y. Determine the length of segment XY.
6	3.	Let $P(x)$ be a polynomial of degree $n > 5$ with integer coefficients and with n distinct integer roots. Prove that the polynomial $P(x) + 3$ has n distinct real roots.
8	4.	A regular 100-gon is dissected into some number of parallelograms and two triangles. Prove that these triangles are equal.
8	5.	Given an integer $h > 1$. Let us call a positive ordinary fraction (not necessarily irreducible) *good* if the sum of its numerator and denominator equals h. Let us call the integer h *remarkable* if every positive ordinary fraction with the denominator smaller than h can be expressed through good fractions (not necessarily distinct) using only addition and subtraction. Prove that h is remarkable if and only if it is prime. (Remind that an ordinary fraction has an integer numerator and a positive integer denominator.)
10	6.	The midpoints of all altitudes of some tetrahedron lie on the sphere inscribed in it. Is this tetrahedron necessarily regular?
12	7.	At an island, there are chameleons of five colors. If a chameleon bites another one, the color of the bitten chameleon changes into one of these 5 colors according to some rule, and the result depends only on the colors of the biting and the bitten chameleon. It is known that 2023 red chameleons can agree on a sequence of bites such that all of them will eventually become blue. What is the least k such that we can guarantee that k red chameleons can become blue, biting each other only? (For instance, the following rules are possible: if a red chameleon bites a green one then the bitten one becomes blue; if a green chameleon bites a red one then the bitten one remains red, so „changes its color to red“; if a red chameleon bites a red one then the bitten one becomes yellow, and so on. Other rules are possible as well.)