



این سوالات برای گروه‌هایی است که هر سه نفر کلاس هشتم و نهم هستند.

نتیجه براساس سه سوالی که از آن‌ها بیشترین امتیاز را گرفته اید، محاسبه می‌شود.

۱. آیا می‌توان ۹ عدد صحیح مثبت متوالی پیدا کرد که حاصل ضرب آنها برابر با جمع ۹ عدد صحیح مثبت متوالی (نه لزوماً همان اعداد) باشد؟

[۴ امتیاز]

۲. فرض کنید AX و BZ ارتفاع‌های مثلث ABC باشند. همچنین AY و BT نیمسازهای این مثلث هستند. می‌دانیم که زوایای XAY و ZBT برابر هستند. آیا الزاماً مثلث ABC متساوی الساقین است؟

[۴ امتیاز]

۳. مریم یک ترازوی متوازن دارد که می‌تواند مشخص کند کدام کفه‌اش سنگین‌تر است یا هر دو کفه وزن مساوی دارند. هم‌چنین او چهار وزنه با ظاهر یکسان اما با جرم‌های 1001 ، 1002 ، 1004 و 1005 گرم دارد. آیا مریم می‌تواند با چهار بار وزن کردن، جرم هر وزنه را پیدا کند؟ می‌توانیم بعد از مشخص شدن نتیجه یک وزن کردن، وزنه‌های مورد نظر برای یک وزن کردن جدید را انتخاب کنیم.

[۴ امتیاز]

۴. الف) آیا می‌توان یک مربع را به ۴ مثلث متساوی الساقین تقسیم کرد، بطوری که هیچ دوتایی از آن‌ها هم‌نهشت نباشند؟

[۳ امتیاز]

ب) آیا می‌توان یک مثلث متساوی الاضلاع را به ۴ مثلث متساوی الساقین تقسیم کرد، بطوری که هیچ دوتایی از آن‌ها هم‌نهشت نباشند؟

[۳ امتیاز]

۵. روی یک جدول تعدادی دومینو قرار دارد بطوری که هر دومینو دو خانه مجاور را اشغال کرده و هیچ کدام از دومینوها در ضلع یا راس با هم مجاور نیستند. خانه‌های پایین-چپ و بالا-راست جدول خالی هستند. یک مهره در خانه پایین-چپ قرار می‌گیرد و در هر نوبت به یک خانه مجاور به راست یا بالا حرکت می‌کند. آیا همواره می‌توان مهره را از خانه پایین-چپ به خانه بالا-راست رساند بطوریکه از هیچ دومینویی عبور نکند، اگر اندازه جدول،

[۲ امتیاز]

الف) 101×100 خانه باشد؟

[۴ امتیاز]

ب) 100×100 خانه باشد؟



(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed up.)

points problems

- 4 1. Is it possible that a product of 9 consecutive positive integers is equal to a sum of 9 consecutive (not necessarily the same) positive integers?
- 4 2. Let AX and BZ be altitudes of the triangle ABC . Let AY and BT be its angle bisectors. It is given that angles XAY and ZBT are equal. Does this necessarily imply that ABC is isosceles?
- 4 3. Maria has a balance scale that can indicate which of its pans is heavier or whether they have equal weight. She also has 4 weights that look the same but have masses of 1001, 1002, 1004 and 1005 g. Can Maria determine the mass of each weight in 4 weighings? The weights for a new weighing may be picked when the result of the previous ones is known.
- 3 4.
 - a) Is it possible to split a square into 4 isosceles triangles such that no two are congruent?
 - 3 b) Is it possible to split an equilateral triangle into 4 isosceles triangles such that no two are congruent?
- 2 5. There are several dominoes on a board such that each domino occupies two adjacent cells and none of the dominoes are adjacent by side or vertex. The bottom left and top right cells of the board are free. A token starts at the bottom left cell and can move to a cell adjacent by side: one step to the right or upwards at each turn. Is it always possible to move from the bottom left to the top right cell without passing through dominoes if the size of the board is
 - 2 a) 100×101 cells;
 - 4 b) 100×100 cells?



این سوالات برای گروه‌هایی است که حداقل یک نفر کلاس دهم و یازدهم هستند.
نتیجه براساس سه سوالی که از آن‌ها بیشترین امتیاز را گرفته‌اید، محاسبه می‌شود.

۱. الف) یک پنج ضلعی محدب با قطرهای غیرمقاطع‌اش به سه مثلث افراز می‌شود. آیا ممکن است مرکز ثقل این مثلث‌ها روی یک خط راست قرار گیرند؟ (مرکز ثقل یک مثلث محل برخورد میانه‌های آن مثلث است).

[۲ امتیاز]

ب) همین سوال را برای یک پنج ضلعی غیرمحدب جواب دهید.

[۲ امتیاز]

۲. الف) مریم یک ترازوی متوازن دارد که می‌تواند مشخص کند کدام کفه‌اش سنگین‌تر است یا هر دو کفه وزن مساوی دارند. هم‌چنین او چهار وزنه با ظاهر یکسان اما با جرم‌های ۱۰۰۰، ۱۰۰۲، ۱۰۰۴ و ۱۰۰۵ گرم دارد. آیا مریم می‌تواند با چهار بار وزن کردن، جرم هر وزنه را پیدا کند؟ می‌توانیم بعد از مشخص شدن نتیجه یک وزن کردن، وزنه‌های مورد نظر برای یک وزن کردن جدید را انتخاب کنیم.

[۲ امتیاز]

ب) همین سوال را جواب دهید با این تفاوت که کفه چپ ترازو یک گرم سبک‌تر از کفه راست است، بنابراین اگر جرم وزنه‌های روی کفه چپ یک گرم سنگین‌تر از جرم وزنه‌های روی کفه راست باشد، دو کفه را برابر نشان می‌دهد.

[۲ امتیاز]

۳. برای چه مقادیری از n می‌توان n عدد صحیح مثبت متوالی پیدا کرد که حاصل ضرب آنها برابر با جمع n عدد صحیح مثبت متوالی (نه لزوماً همان اعداد) باشد؟

[۵ امتیاز]

۴. می‌دانیم که یک معادله درجه دو حداکثر دو ریشه دارد. آیا ممکن است که معادله $[x^2] + px + q = 0$ با $p \neq 0$ بیش از ۱۰۰ ریشه داشته باشد؟ (منظور از $[x^2]$ بزرگترین عدد صحیحی است که از x^2 بزرگتر نیست).

[۵ امتیاز]

۵. فرض کنید O مرکز دایره محیطی یک مثلث حاده ABC باشد. هم‌چنین فرض کنید M وسط ضلع AC باشد. خط راست BO ارتفاع‌های AA_1 و CC_1 را به ترتیب در نقاط H_a و H_c قطع می‌کند. دایره‌های محیطی مثلث‌های BH_aA و BH_cC در یک نقطه دوم K یک‌دیگر را قطع می‌کنند. ثابت کنید K روی خط راست BM است.

[۶ امتیاز]



(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed up.)

points problems

- 1.
- 2 a) A convex pentagon is partitioned into three triangles by nonintersecting diagonals. Is it possible for centroids of these triangles to lie on a common straight line?
- 2 b) The same question for a non-convex pentagon.
- 2.
- 2 a) Maria has a balance scale that can indicate which of its pans is heavier or whether they have equal weight. She also has 4 weights that look the same but have masses of 1000, 1002, 1004 and 1005 g. Can Maria determine the mass of each weight in 4 weighings? The weights for a new weighing may be picked when the result of the previous ones is known.
- 2 b) The same question when the left pan of the scale is lighter by 1 g than the right one, so the scale indicates equality when the mass on the left pan is heavier by 1 g than the mass on the right pan.
- 5 3. For which n is it possible that a product of n consecutive positive integers is equal to a sum of n consecutive (not necessarily the same) positive integers?
- 5 4. It is well-known that a quadratic equation has no more than 2 roots. Is it possible for the equation $[x^2] + px + q = 0$ with $p \neq 0$ to have more than 100 roots? (By $[x^2]$ we denote the largest integer not greater than x^2 .)
- 6 5. Let O be the circumcenter of an acute triangle ABC . Let M be the midpoint of AC . The straight line BO intersects the altitudes AA_1 and CC_1 at the points H_a and H_c respectively. The circumcircles of the triangles BH_aA and BH_cC have a second point of intersection K . Prove that K lies on the straight line BM .