شماره گروه:

45th International Mathematics
Tournament of Towns
Junior O level paper
Spring 2024

خانه ریاضیات اصفهان

مسابقه سطح عادی ۱

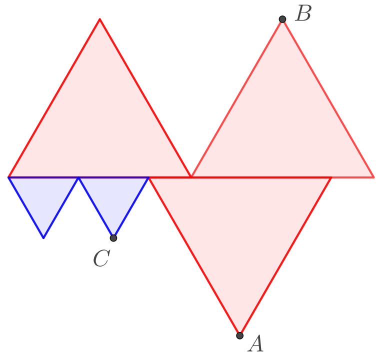
اسفند ۱۴۰۲

سوالات برای گروه‌هایی است که هر سه نفر کلاس هشتم و نهم هستند. نتیجه براساس سه سوالی که از آن‌ها بیشترین امتیاز را گرفته اید، محاسبه می‌شود.

۱. هروقت تینا یک کیک کامل یا یک تکه کیک را به دو تکه تقسیم می‌کند، همیشه به دو قسمت با وزن مساوی تقسیم می‌کند. هروقت او کیک را به تعداد بیشتری تکه (حداقل سه تکه) تقسیم می‌کند، می‌تواند به وزن‌های دلخواه تقسیم کند اما وزن همه تکه‌های تقسیم شده باید متفاوت باشد. تینا بعد از چند بار تکه کردن، کیک را به ۱۷ قسمت تقسیم کرده است. آیا ممکن است که همه این تکه‌ها وزن برابر داشته باشند؟ (تکه‌ها را نمی‌توان بهم چسباند) [۴ امتیاز]

۲. یک صفحه شطرنج 8×8 با رنگ‌های مختلفی رنگ شده است (هر خانه با یک رنگ، رنگ شده). می‌دانیم که خانه‌هایی که فقط در یک راس مشترکند یا خانه‌هایی که با یک حرکت اسب می‌توان از یکی به دیگری رفت، رنگ متفاوت دارند. کمترین تعداد رنگی که با آن می‌توان صفحه شطرنج را به این شکل رنگ کرد را بدست آورید. [۴ امتیاز]

۳. پنج مثلث متساوی الاضلاع بصورت شکل زیر کنار هم چیده شده‌اند. سه مثلث بزرگ هم‌نهشت هستند و دو مثلث کوچک نیز هم‌نهشت هستند. زوایای مثلث ABC را پیدا کنید. [۵ امتیاز]



۴. دو دزد دریایی ۲۵ سکه طلا با ارزش‌های مختلف را در یک شکل 5×5 قرار داده‌اند. آن‌ها به نوبت هر بار یک سکه از لبه بر می‌دارند (یک سکه را می‌توان برداشت اگر در سمت چپ یا راست یا بالا یا پایین آن سکه‌ای نباشد). آیا این درست است که دزد اول همیشه می‌تواند طوری سکه بردارد که با اطمینان حداقل نصف ارزش کل سکه‌ها را بردارد؟ [۵ امتیاز]

۵. تعداد N مار بوا با آرواره‌هایی به اندازه ۱، ۲، . . .، N سانتی متر وجود دارند. هر مار بوا می‌تواند یک سیب که قطر آن از اندازه آرواره‌اش بزرگ‌تر نباشد را بخورد. با این وجود، نمی‌توانیم اندازه آرواره یک مار بوا را از روی ظاهرش تشخیص دهیم. موقع عصر، نگهدارنده مارها می‌تواند هر تعداد سیب از هر اندازه‌ای را به هر کدام از مارها بدهد. در شب، هر مار بوا همه سیب‌هایی که مناسب آرواره‌اش هست را می‌خورد. کمترین تعداد سیب‌هایی که نگهدارنده باید بین مارها توزیع کند تا بتواند با اطمینان اندازه آرواره هر مار را تعیین کند، چند است؟ [۶ امتیاز]

شماره گروه:

۱

45th International Mathematics
Tournament of Towns
Junior O level paper
Spring 2024

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح عادی ۱
اسفند ۱۴۰۲

(The result is computed from the three problems with the highest scores.)

points problems

4

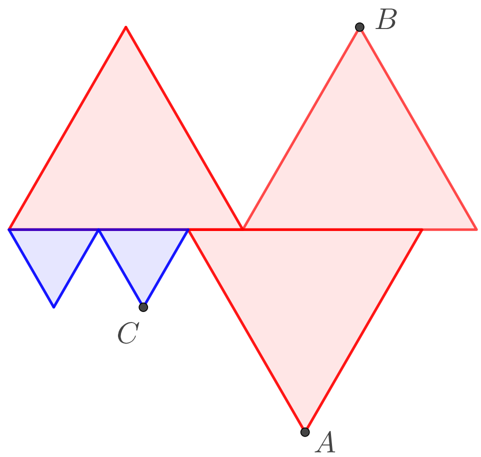
1. Whenever Tom cuts a whole pie or a piece of a pie into two pieces he always makes the pieces equal by weight. Whenever he cuts it into a greater number of pieces, he can make them of arbitrary weights but all these weights are always different. As a result of several cuttings, Tom has split the pie into 17 pieces. Could it so happen that these pieces were all of equal weight? (The pieces cannot be joined together.)

4

2. A 8×8 chess board has been repainted into several colors (each square into one color). It turned out that if two squares are adjacent diagonally or stand apart at a move of a knight then they are necessarily of different colors. What is the minimal number of colors that could be used?

5

3. Five equilateral triangles are constructed in a manner shown in the figure below. Three major triangles are equal, two minor triangles are also equal. Find the angles of the triangle ABC.



5

4. Two pirates divide their catch of 25 gold coins of various values arranged in a 5×5 shape. They take turns each picking a single coin from the edge (a coin can be picked if there is no other coin to the left or to the right or upwards or downwards from the selected one). Is it true that the first pirate always can act so that he will get for sure at least half of the total catch?

6

5. There are N boa snakes, with jaws of sizes of 1 cm, 2 cm, ..., N cm. Each boa snake can swallow an apple of any diameter (in cm) not greater than the size of its jaw. However, it is impossible to determine the size of a boa snake's jaw by its appearance. In the evening, the boa snake keeper can give any number of apples of any size to each of them. At night, a boa snake will swallow all the apples that fit its jaw. What is the minimal number of apples the keeper needs to distribute among his boa snakes to determine for sure the jaw size of each boa snake?

شماره گروه:

45th International Mathematics
Tournament of Towns
Senior O level paper
Spring 2024

خانه ریاضیات اصفهان

مسابقه سطح عادی ۲

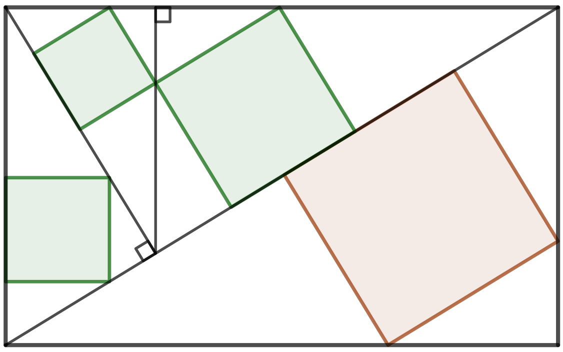
اسفند ۱۴۰۲

این سوالات برای گروه‌هایی است که حداقل یک نفر کلاس دهم و یازدهم هستند.

نتیجه براساس سه سوالی که از آن‌ها بیشترین امتیاز را گرفته‌اید، محاسبه می‌شود.

۱. در یک دنباله از اعداد حقیقی $a_1, a_2, \ldots$ هر عدد از a_3 به بعد، برابر میانگین دو عدد قبلش است. ثابت کنید همه سهمی‌های با معادله $y = x^2 + a_n x + a_{n+1}$ (برای $n = 1, 2, 3, \ldots$) یک نقطه مشترک دارند. [۳ امتیاز]

۲. یک مستطیل دلخواه به شکل زیر به مثلث‌های قائم‌الزاویه تقسیم شده است. درون هر مثلث قائم‌الزاویه یک مربع محاط شده است، بطوری که ضلع مربع روی وتر مثلث است. کدام یک بزرگتر است: مساحت بزرگترین مربع، یا جمع مساحت سه مربع دیگر؟ [۴ امتیاز]



۳. هروقت تینا یک کیک کامل یا یک تکه کیک را به دو تکه تقسیم می‌کند، همیشه به دو قسمت با وزن مساوی تقسیم می‌کند. هروقت او کیک را به تعداد بیشتری تکه (حداقل سه تکه) تقسیم می‌کند، می‌تواند به وزن‌های دلخواه تقسیم کند اما وزن همه تکه‌های تقسیم شده باید متفاوت باشد. تینا بعد از چند بار تکه کردن، کیک را به N تکه تقسیم کرده است. آیا این درست است که برای هر $N \geq 10$ همه این تکه‌ها می‌توانند وزن برابر داشته باشند؟ (تکه‌ها را نمی‌توان بهم چسباند) [۵ امتیاز]

۴. آیا این درست است که جمع زوایای دووجهی داخلی در قاعده یک هرم مثلثی همواره کوچکتر از جمع زوایای دوجهی خارجی متناظر است؟ (منظور از زاویه دوجهی، زاویه بین دو وجه مجاور است.) [۵ امتیاز]

۵. تعداد ۴۵ بچه در یک کلاس ریاضی قرار دارند و برخی از آن‌ها باهم دوست هستند. اگر هر طور آن‌ها را به دسته‌های سه نفره تقسیم کنید، همیشه یک دسته وجود دارد که هر سه نفر در آن دسته دوست هستند. ثابت کنید می‌توان بچه‌ها را به دسته‌های سه نفره تقسیم کرد، بطوریکه در هر دسته حداقل دو نفر دوست باشند. [۶ امتیاز]

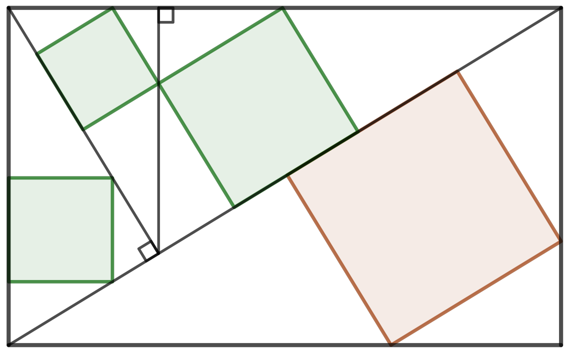
شماره گروه:

45th International Mathematics
Tournament of Towns
Senior O level paper
Spring 2024

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح عادی ۲
اسفند ۱۴۰۲

(The result is computed from the three problems with the highest scores.)

points	problems
3	1. In a sequence of real numbers $a_1, a_2, \ldots$ each number starting from a_3 equals the average of two previous numbers. Prove that all the parabolas of the form $y = x^2 + a_n x + a_{n+1}$ (for $n = 1, 2, 3, \ldots$) have a common point.
4	2. An arbitrary rectangle is split into right triangles as shown in the figure below. Into every right triangle, a square is inscribed with its side lying on the hypotenuse. What is greater: the area of the largest square or the sum of the areas of the remaining three squares?



points	problems
5	3. Whenever Tom cuts a whole pie or a piece of a pie into two pieces he always makes the pieces equal by weight. Whenever he cuts it into a greater number of pieces he can make them of arbitrary weights but all these weights are always different. As a result of several cuttings, Tom has split the pie into N pieces. Is it true that for any $N \geq 10$ all pieces could weigh the same? (The pieces cannot be joined together.)
5	4. Is it true that the sum of internal dihedral angles at the base of a triangular pyramid is always less than the sum of the corresponding external dihedral angles?
6	5. There are 45 children in a math circle and some of them are friends. If you split them in triples in any way, there will always be a triple where all three are friends. Prove that the children can be split in triples in such a way that each triple contains a pair of friends.