شماره گروه:

۱A

45th International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper
Spring 2024

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح پیشرفته ۱
اسفند ۱۴۰۲

- برای گروه‌هایی که هر سه نفر کلاس هشتم یا نهم هستند.

- امتیاز هر گروه براساس جمع امتیاز سه سوال با بیشترین نمره بدست می‌آید.

۱. ۱۲ دانش‌آموز در یک کلاس ورزش هستند. همه دانش‌آموزان قدرت متفاوت دارند. مربی آن‌ها را به تیم‌های ۶ نفره تقسیم می‌کند. او این‌کار را ۱۰ بار انجام می‌دهد و هر بار تقسیم‌بندی جدید است. تیم‌ها با هم مسابقه طناب کشی را انجام می‌دهند. آیا ممکن است که همه ۱۰ بازی مساوی شود (یعنی هربار جمع قدرت دانش‌آموزان هر تیم برابر باشد)؟ [۴ امتیاز]

۲. ثابت کنید از بین رئوس یک ۹ ضلعی محدب، سه راس وجود دارند که تشکیل یک مثلث با یک زاویه منفرجه می‌دهند و هیچ‌کدام از اضلاع مثلث با اضلاع ۹ ضلعی منطبق نیست. [۵ امتیاز]

۳. یک دسته از ۱۰۰ سنگ وجود دارد. دو بازیکن داریم. بازیکن اول، یک سنگ را برمی‌دارد. سپس بازیکن دوم، یک یا دو سنگ را بر می‌دارد. سپس بازیکن اول، یک یا دو یا سه سنگ را برمی‌دارد. سپس بازیکن دوم، یک یا دو یا سه یا چهار سنگ را برمی‌دارد و الی آخر. بازیکنی که آخرین سنگ را بردارد برنده است. کدام بازیکن می‌تواند برد خودش را صرف‌نظر از استراتژی حریف تضمین کند؟ [۷ امتیاز]

۴. تارا یک کسر تجزیه ناپذیر مثبت $x = \frac{m}{n}$ را انتخاب می‌کند. می‌توانیم یک کسر مثبت y کمتر از یک را انتخاب کنیم و تارا صورت کسر تجزیه ناپذیر برابر با $x+y$ را به ما می‌گوید. چطور می‌توانیم با دو بار انجام این کار، با اطمینان x را مشخص کنیم. [۷ امتیاز]

۵. تعداد ۹ ستون در یک ردیف وجود دارد. تعدادی بند افقی بین دو ستون مجاور در بعضی مکان‌ها وجود دارد که هیچ دوتایی از آن‌ها در یک ارتفاع نیستند. یک سوسک از یک ستون بالا می‌رود و وقتی به یک بند می‌رسد در طول بند حرکت کرده و به ستون مجاور می‌رود و دوباره به سمت بالا می‌خزد. می‌دانیم که اگر سوسک از پایین ستون اول شروع کند، در ستون ۹ مسیرش را به پایان می‌رساند. آیا همواره می‌توانیم یکی از بندها را حذف کنیم، طوری که سوسک در ستون ۵ مسیرش را به پایان برساند؟ (مثلا، اگر بندها مطابق شکل زیر باشند، سوسک مسیر خط توپر را طی می‌کند. اگر سومین بند در مسیر سوسک را حذف کنیم، سوسک در مسیر نقطه‌چین حرکت می‌کند.) [۹ امتیاز]

۶. نقاط M و N و P و Q روی دایره محیطی مثلث ABC مشخص شده‌اند. آن‌ها به ترتیب وسط کمان‌های BAC و CBA و BC و AC در دایره هستند. دایره $\omega_۱$ بر ضلع BC در نقطه $A_۱$ و بر امتداد ضلع‌های AC و AB مماس است. دایره $\omega_۲$ بر ضلع AC در نقطه $B_۱$ و بر امتداد اضلاع BA و BC مماس است. می‌دانیم $A_۱$ بر پاره‌خط NP قرار دارد. ثابت کنید B_1 بر پاره‌خط MQ قرار دارد. [۱۰ امتیاز]

۷. تعداد ۹۹ کارت وجود دارد که روی هر کدام یک عدد حقیقی متمایز نوشته شده است. جمع همه اعداد گنگ است. یک دست از ۹۹ کارت را *بد شانس* می‌گوییم اگر برای هر k از ۱ تا ۹۹، جمع اعداد k کارت بالایی گنگ باشد. تینا تعداد همه راه‌هایی که بتوان کارت‌ها را در یک دست بدشانس چید، شمرده است. کمترین عددی که تینا می‌تواند بدست آورد، چند است؟ [۱۲ امتیاز]

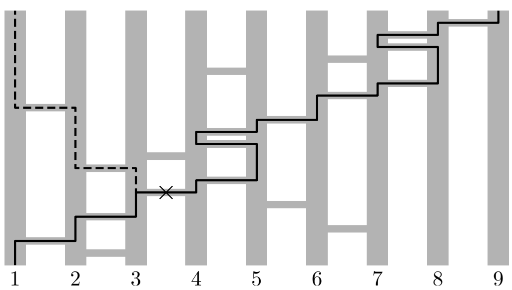
شماره گروه:

45th International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper
Spring 2024

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح پیشرفته ۱
اسفند ۱۴۰۲

Grades 8 – 9 (ages 13 – 15)
(The result is computed from the three problems with the highest scores;
the scores for the individual parts of a single problem are summed up.)

points	problems
4	1. There were 12 students at a physical education class, all students of different strength. The coach divided them into teams of 6 students. He did so 10 times, and each time the division was new. The teams played tug-of-war. Could it so happen that all 10 games resulted in a draw (i.e. total strengths of the students in both teams were equal each time)?
5	2. Prove that among the vertices of any convex nonagon there are three vertices that form an obtuse triangle, neither side of which coincides with a side of the nonagon.
7	3. There is a pile of 100 stones. There are two players. The first one picks 1 stone, then the second one picks 1 or 2 stones, then the first one picks 1, 2 or 3 stones, then the second one picks 1, 2, 3 or 4 stones and so on. The one picking the last stone wins. Which player can ensure his victory regardless of the opponent's strategy?
7	4. Tom chose a positive irreducible fraction $x = \frac{m}{n}$. One can choose a positive fraction y, less than 1, and Tom will tell the numerator of the irreducible fraction equal to the sum $x + y$. How to determine x for sure in two such actions?
9	5. There are 9 vertical pillars standing in a row. There are horizontal sticks in some places between neighboring pillars, neither two of which are at the same height. The beetle crawls upwards, and whenever it reaches a stick, it crawls along it to the neighboring pillar and carries on to crawl upwards. It is known that if the beetle starts from the bottom of the first pillar then it ends up at the pillar nine. Is it always possible to remove one of the sticks so that the beetle would end up on top of the pillar five? (For instance, if the sticks are positioned as in the picture, then the beetle will follow the solid line. If the third stick on the way of the beetle is removed, the beetle will crawl along the dotted line.)



points	problems
10	6. The points M and N, P and Q are marked on the circumcircle of the triangle ABC. They are the midpoints of the circle arcs BAC, CBA, BC and AC respectively. The circle ω_1 is tangent to the side BC at the point A_1 and tangent to the extensions of the sides AC and AB. The circle ω_2 is tangent to the side AC at the point B_1 and tangent to the extensions of the sides BA and BC. It turned out that A_1 belongs to the segment NP. Prove that B_1 belongs to the segment MQ.
12	7. Distinct real numbers are printed on 99 cards, one number on each card. Their total sum is irrational. A pile of 99 cards is called *unfortunate* if for every k from 1 to 99 the sum of numbers on k upper cards is irrational. Tom has calculated the number of all possible ways to put the cards into an unfortunate pile. What is the minimal number Tom could obtain?

شماره گروه:

۲

45th International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper
Spring 2023

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح پیشرفته ۲
اسفند ۱۴۰۲

- برای گروه‌هایی که حداقل یک نفر کلاس دهم یا یازدهم است.

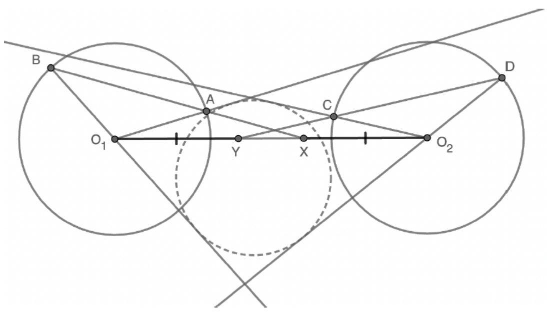
-امتیاز هر گروه براساس جمع امتیاز سه سوال با بیشترین نمره بدست می‌آید.

۱. همه جفت اعداد صحیح مثبت m و n را بیابید که $m!! = n!$. منظور از $m!!$ ضرب همه اعداد صحیح مثبت کمتر یا مساوی m است که با m زوجیت یکسان دارند. مثلا $5!! = 15$ و $6!! = 48$. [۴ امتیاز]

۲. یک مجموعه متناهی از گوی‌های کروی به شعاع ۱ در فضا قرار دارد. این گوی‌ها ممکن است همدیگر را قطع کنند. اما هیچکدام شامل مرکز گوی دیگر نیست. در مرکز هر گوی یک لامپ روشن می‌شود و در همه جهات نور ساتع می‌کند. آیا ممکن است که هر پرتو نوری که از مرکز هر گوی ساتع می‌شود، به یک گوی دیگر برخورد کند؟ [۶ امتیاز]

۳. در هر خانه یک جدول $N \times N$ یک عدد نوشته شده است. یک خانه C را خوب می‌گوییم اگر یکی از خانه‌های مجاور آن با ضلع مشترک، دارای عددی باشد که دقیقاً یک واحد از عدد خانه C بیشتر است و یک خانه مجاور دیگر با ضلع مشترک دارد که عدد آن دقیقاً سه واحد از عدد خانه C بیشتر است. بیشترین تعداد خانه‌های خوب چند تا است؟ [۷ امتیاز]

۴. دو دایره یکسان ω_1 و ω_2 با مراکز O_1 و O_2 داده شده است. نقاط X و Y روی پاره‌خط O_1O_2 انتخاب شده‌اند بطوری که $O_1Y = O_2X$. نقاط A و B روی دایره ω_1 و خط AB از X می‌گذرد. نقاط C و D روی دایره ω_2 و خط CD از Y می‌گذرد. ثابت کنید یک دایره مماس بر خطوط AO_1، BO_1، CO_2 و DO_2 وجود دارد.

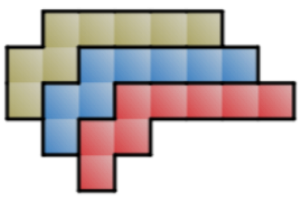


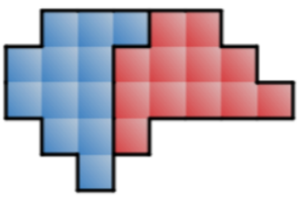
[۸ امتیاز]

۵. یک چندجمله‌ای درجه $n > 0$ ضرایب ناصفر صحیح دارد که هرکدام ریشه آن چندجمله ای است. ثابت کنید چندجمله ای نمی‌تواند ضرائبی به جز ۱، ۱− و ۲− داشته باشد. [۱۰ امتیاز]

۶. حسن یک فلوت جادویی دارد که فقط می‌تواند دو نوت "B" و "C" را بنوازد. او برای اینکه برنده شود باید ۳۰۰ نوت تصادقی را بنوازد. اما قبل از اینکه او شروع به نواختن کند، لادن ملودی‌های دلخواهی را غیر مجاز اعلام می‌کند: یکی از پنج نوت، یکی از ۶ نوت، ...، یکی از ۳۰ نوت. اگر در هر لحظه‌ای آخرین نوت‌های نواخته شده، تشکیل یک ملودی ممنوع بدهند، فلوت دیگر نمی‌نوازد و حسن می‌بازد. آیا حسن می‌تواند صرف نظر از ملودی‌هایی که لادن ممنوع کرده است، برنده شود؟ [۱۲ امتیاز]

۷. منظور از یک نوار یک چندضلعی شطرنجی (مربع-مربع) است که می‌توانیم از یکی از خانه‌هایش شروع کنیم و فقط در دو جهت بالا و راست حرکت کنیم. نوارهای یکسان مختلفی به این شکل می‌تواند با انتقال توسط بردار $(1,-1)$ بصورت تودرتو ساخته شود. ثابت کنید برای هر نوار که از زوج خانه تشکیل شده، یک عدد فرد k با ویژگی زیر وجود دارد: اگر ما k تا از چنین نوارهایی بصورت متوالی و تودرتو بسازیم، آن‌گاه می‌توان چندضلعی حاصل را از روی اضلاع مربع‌ها برید، بطوری که دو بخش حاصل یکسان باشند. (یک مثال را در شکل ببینیذ.)





[۱۲ امتیاز]

شماره گروه:

45^{th} International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper
Spring 2023

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح پیشرفته ۲
اسفند ۱۴۰۲

Grades 10 – 11 (ages 15 and older)
(The result is computed from the three problems with the highest scores;
the scores for the individual parts of a single problem are summed up.)

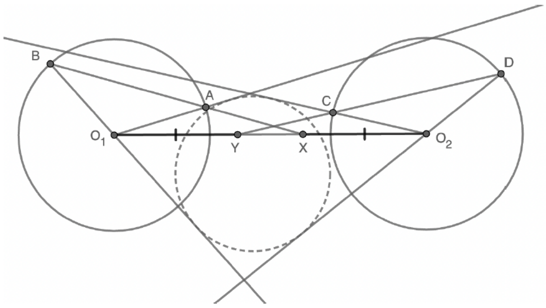
points problems

4
1. Find all pairs of positive integers m and n such that $m!! = n!$. (Double factorial $m!!$ is the product of all positive integers not exceeding m and having the same parity as m. For example, $5!! = 15$, $6!! = 48$).

6
2. A finite set of disks with radius 1 is located in the space. These disks may intersect but they do not contain centers of each other. In the center of every disk, a lamp is switched on. It spreads light in all directions. Could it so happen that every ray of light emitted from the center of any disk would meet some other disk?

7
3. A single number is written in each cell of $N \times N$ table. Let us call a cell C *good* if some cell neighboring C by side contains the number greater by 1 than the number in C, and another cell neighboring C by side contains the number greater by 3 than the number in C. What is the greatest possible number of good cells?

8
4. Two equal circles ω_1 and ω_2 with centers at O_1 and O_2 are given. The points X and Y are chosen on the segment O_1O_2 so that $O_1Y = O_2X$. The points A and B belong to ω_1, and the line AB contains X. The points C and D belong to ω_2, and the line CD contains Y. Prove that there is a circle tangent to the lines AO_1, BO_1, CO_2 and DO_2.



10
5. A polynomial of degree $n > 0$ has integer non-zero coefficients, each of which is its root. Prove that this polynomial cannot have coefficients other than 1, -1 and -2.

12
6. Harry has a magic flute which can only play two notes: “B” and “C”. In order to win he has to play 300 random notes. But before he starts playing, Lord Voldemort declares arbitrary melodies as forbidden: one of five notes, one of six notes, ..., one of thirty notes. If at any moment the last played notes form a forbidden melody, the flute stops playing and Harry looses. Can Harry win regardless of the melodies forbidden by the Lord Voldemort?

12
7. Here *a stripe* will mean a checkered polygon which can be passed starting from some its cell and moving only in two directions, upwards or rightwards. Several equal stripes of this form may be inserted one into another by shifts by the vector $(-1, 1)$. Prove that for any stripe consisting of even number of cells there exists an odd k with the following property: if we join k such stripes inserting them consecutively one into another, then the resulting polygon can be split along the grid lines into two equal parts. (See an example at the picture.)