



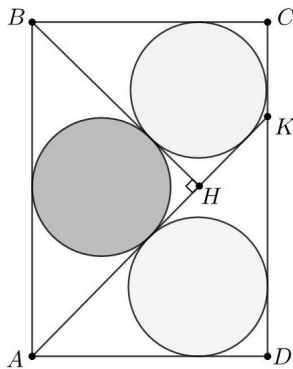
سوالات برای گروه‌هایی است که هر سه نفر کلاس هشتم و نهم هستند. نتیجه براساس سه سوالی که از آن‌ها بیشترین امتیاز را گرفته‌اید، محاسبه می‌شود.

۱. روی تخته سیاه اعداد ۱، ۲، ...، ۱۰۰ نوشته شده است. بارید در هر نوبت، دو عدد دلخواه a و b را که $a \geq b > 0$ ، پاک می‌کند و عدد $[a/b]$ را می‌نویسد. بعد از ۹۹ نوبت، روی تخته سیاه یک عدد نوشته شده است. بیشترین مقدار این عدد چقدر است؟ (توجه کنید که $[x]$ برابر بزرگترین عدد صحیح نایبتر از x است.)

[۴ امتیاز]

۲. تعداد N دانش‌آموز در یک کلاس درس هستند و انجمن‌های مختلفی بین آن‌ها وجود دارد. جامعه‌پذیری یک دانش‌آموز به معنی تعداد دانش‌آموزان بزرگترین انجمنی است که او در آن انجمن عضو است (اگر یک دانش‌آموز در هیچ انجمنی عضو نباشد، جامعه‌پذیری او برابر یک است). می‌دانیم که همه دخترهای این کلاس جامعه‌پذیری متفاوتی دارند. بیشترین تعداد دخترها در کلاس چندتا است؟

[۵ امتیاز]



۳. نقطه K روی ضلع CD از مستطیل $ABCD$ انتخاب شده است. از نقطه B پاره خط BH را بر پاره خط AK عمود می‌کنیم. پاره‌خط‌های BH و AK مستطیل را به سه قسمت تقسیم می‌کند، بطوریکه هر قسمت یک دایره محاطی دارد (شکل را ببینید). ثابت کنید که اگر دایره‌هایی که بر CD مماس هستند برابر باشند، آن‌گاه دایره سوم هم با آن‌ها برابر است.

[۵ امتیاز]

۴. پارچ‌های مختلفی حاوی آبمیوه (نه لزوماً با اندازه مساوی) دور یک دایره قرار دارند. می‌توانیم هر مقدار آبمیوه از هر پارچ (از هیچ مقدار تا کل پارچ) را به پارچ سمت راست آن بریزیم بطوریکه پارچ دوم سرریز نشود و قند محتوای آن برابر ۱۰ درصد بشود. می‌دانیم که در لحظه شروع این انتقال از هر پارچ امکان‌پذیر است. ثابت کنید می‌توانیم به ترتیبی چند انتقال انجام دهیم که از هر پارچ حداکثر یک انتقال انجام شود و قند محتوای هر پارچ غیرخالی برابر ۱۰ درصد بشود. (قند یک پارچ برابر با درصد قند درون پارچ به وزن آن است. همیشه قند در یک پارچ بصورت یکنواخت توزیع می‌شود.)

[۶ امتیاز]

۵. خانه‌های یک جدول مستطیلی که بصورت شطرنجی سیاه و سفید شده‌اند، با دومینوهای ۱×۲ فرش شده است. اگر یک دومینوی افقی و عمودی ضلع مشترک داشته باشند، روی آن ضلع مشترک یک در داریم که هم‌رنگ با خانه‌ی متصل‌کننده از دومینوای است که از ضلع کوچکش مجاور است. آیا الزاماً تعداد درهای سفید و سیاه برابر است؟

[۶ امتیاز]



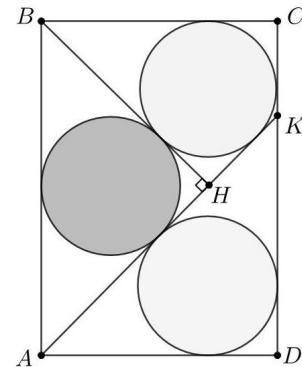
(The result is computed from the three problems with the highest scores.)

points problems

- 4 1. On the blackboard, there are numbers $1, 2, \dots, 100$. At each move, Bob erases arbitrary two numbers a and b , where $a \geq b > 0$, and writes the single number $[a/b]$. After 99 such moves the blackboard will contain a single number. What is its maximum possible value? (Remind that $[x]$ is the maximum integer not exceeding x .)

- 5 2. There are N pupils in a school class, and there are several communities among them. *Sociability* of a pupil will mean the number of pupils in the largest community to which the pupil belongs (if the pupil belongs to none then the sociability equals 1). It occurred that all girls in the class have different sociabilities. What is the maximum possible number of girls in the class?

- 5 3. A point K is chosen on the side CD of a rectangle $ABCD$. From the vertex B , the perpendicular BH is dropped to the segment AK . The segments AK and BH divide the rectangle into three parts such that each of them has the inscribed circle (see figure). Prove that if the circles tangent to CD are equal then the third circle is also equal to them.



- 6 4. Several jugs (not necessarily of the same size) with juices are placed along a circle. It is allowed to transfuse any part of juice (maybe nothing or the total content) from any jug to the neighboring one on the right, so that the latter one is not overflowed and the sugariness of its content becomes equal to 10%. It is known that at the initial moment such transfusion is possible from each jug. Prove that it is possible to perform several transfusions in some order, at most one transfusion from each jug, such that the sugariness of the content of each non-empty jug will become equal to 10%. (Sugariness is the percent of sugar in a jug, by weight. Sugar is always uniformly distributed in a jug.)

- 6 5. A rectangular checkered board is painted black and white as a chessboard, and is tiled by dominoes 1×2 . If a horizontal and a vertical dominoes have common segment, it has a door which has the color of the adjoining cell of the domino adjacent by a short side. Is it necessarily true that the number of white doors equals the number of black doors?



این سوالات برای گروه‌هایی است که حداقل یک نفر کلاس دهم و یازدهم هستند.
نتیجه براساس سه سوالی که از آن‌ها بیشترین امتیاز را گرفته‌اید، محاسبه می‌شود.

[۴ امتیاز] ۱. کوچکترین عدد صحیح مثبتی که جمع چهارتا از شمارنده‌هایش برابر ۲۰۲۵ است، چه عددی است؟

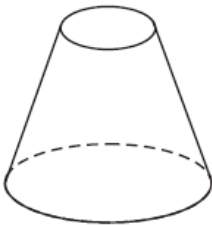
۲. صد خط در صفحه وجود دارد بطوریکه هیچ دو تایی از آن‌ها موازی نیستند و هیچ سه تایی از آن‌ها هم‌رس نیستند. چهارضلعی‌هایی که همه ضلع‌هایشان روی این خطوط قرار دارد را در نظر بگیرید (از جمله چهارضلعی‌هایی که برخی از خطوط از درون آن‌ها می‌گذرند). آیا این درست است که تعداد چهارضلعی‌های محدب برابر با تعداد چهارضلعی‌های غیرمحدب است؟

[۴ امتیاز]

۳. پارچ‌های مختلفی حاوی آبمیوه (نه لزوماً با اندازه مساوی) دور یک دایره قرار دارند. می‌توانیم هر مقدار آبمیوه از هر پارچ (از هیچ مقدار تا کل پارچ) را به پارچ سمت راست آن بریزیم بطوریکه پارچ دوم سرریز نشود و قند محتوای آن برابر ۱۰ درصد بشود. می‌دانیم که در لحظه شروع این انتقال از هر پارچ امکان‌پذیر است. ثابت کنید می‌توانیم به ترتیبی چند انتقال انجام دهیم که از هر پارچ حداکثر یک انتقال انجام شود و قند محتوای هر پارچ غیرخالی برابر ۱۰ درصد بشود. (قند یک پارچ برابر با درصد قند درون پارچ به وزن آن است. همیشه قند در یک پارچ بصورت یکنواخت توزیع می‌شود.)

[۵ امتیاز]

۴. یک تشت روی صفحه قرار دارد که سطح مقطع بالای آن بزرگتر از سطح مقطع پایین آن است. تشت را برعکس می‌کنیم. ثابت کنید که مساحت سایه قابل مشاهده آن کاهش می‌یابد. (تشت یک مخروط ناقص دوار قائم است: دو سطح مقطع آن دایره‌هایی در صفحات موازی هستند بطوریکه خط واصل مراکز آن‌ها بر این دو صفحه عمود است. منظور از سایه قابل مشاهده همه سایه بجز سایه زیر تشت است. اشعه‌های خورشید را موازی بگیرید.)



[۵ امتیاز]

۵. یک چندجمله‌ای با ضرائب صحیح داده شده است که حداقل یک ریشه صحیح دارد. بزرگترین مقسوم علیه مشترک همه ریشه‌های صحیح آن برابر یک است. ثابت کنید که اگر ضریب بزرگترین توان در این چندجمله‌ای برابر یک باشد، آن‌گاه بزرگترین مقسوم علیه مشترک بقیه ضرائب نیز برابر یک است.

[۶ امتیاز]



(The result is computed from the three problems with the highest scores.)

points problems

- 4 1. Find the minimum positive integer such that some four of its natural divisors sum up to 2025.
- 4 2. There are 100 lines in the plane, such that no two are parallel and no three are concurrent. Consider the quadrilaterals such that all their sides lie on these lines (including the quadrilaterals whose interior is crossed by some of these lines). Is it true that the number of convex quadrilaterals equals the number of non-convex ones?
- 5 3. Several jugs (not necessarily of the same size) with juices are placed along a circle. It is allowed to transfuse any part of juice (maybe nothing or the total content) from any jug to the neighboring one on the right, so that the latter one is not overflowed and the sugariness of its content becomes equal to 10%. It is known that at the initial moment such transfusion is possible from each jug. Prove that it is possible to perform several transfusions in some order, at most one transfusion from each jug, such that the sugariness of the content of each non-empty jug will become equal to 10%. (Sugariness is the percent of sugar in a jug, by weight. Sugar is always uniformly distributed in a jug.)
- 5 4. There was a tub on the plane, with its upper base greater than the lower one. The tub was overturned. Prove that the area of its visible shade did decrease. (The tub is a frustum of a right circular cone: its bases are two discs in parallel planes, such that their centers lie on a line perpendicular to these planes. The visible shade is the total shade besides the shade under the tub. Consider the sun rays as parallel.)
- 6 5. Given a polynomial with integer coefficients, which has at least one integer root. The greatest common divisor of all its integer roots equals 1. Prove that if the leading coefficient of the polynomial equals 1 then the greatest common divisor of the other coefficients also equals 1.

