شماره گروه:

46th International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper
Spring 2025

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح پیشرفته ۱
اسفند ۱۴۰۳

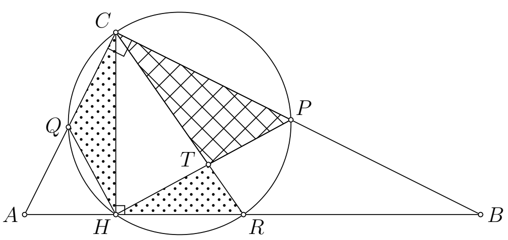
- برای گروه‌هایی که هر سه نفر کلاس هشتم یا نهم هستند.

- امتیاز هر گروه براساس جمع امتیاز سه سوال با بیشترین نمره بدست می‌آید.

۱. معلم دو رقم متفاوت از $\{1, 2, \ldots, 9\}$ انتخاب می‌کند. نیکو می‌خواهد یک عدد ۷ رقمی بخش‌پذیر به ۷ پیدا کند بطوریکه هیچ رقمی به جز این دو رقم نداشته باشد. آیا اینکار برای هر انتخاب معلم ممکن است؟ [۴ امتیاز]

۲. در یک جدول 2025×2025، برخی خانه‌ها علامت دارند. سامان در هر حرکت می‌تواند تعداد خانه‌های علامت‌دار در هر مربع شطرنجی با ضلع کمتر از ۲۰۲۵ درون جدول اولیه را بپرسد. کمترین تعداد حرکت برای پیدا کردن تعداد دقیق خانه‌های علامت‌دار چند است؟ [۵ امتیاز]

۳. در یک مثلث ABC با زاویه قائم C، ارتفاع CH رسم شده است. یک دایره دلخواه که از نقاط C و H می‌گذرد، پاره‌خط‌های AC، CB و BH را برای بار دوم به ترتیب در نقاط Q، P و R قطع می‌کند. پاره‌خط‌های HP و CR در نقطه T برخورد دارند. کدام بزرگتر است: مساحت مثلث CPT یا جمع مساحت مثلث‌های CQH و HTR؟ [۵ امتیاز]



۴. تعداد $2N$ عدد حقیقی داده شده است. می‌دانیم که اگر بطور دلخواه به دو دسته با N عدد تقسیم شوند، اختلاف حاصلضرب اعداد هر دسته حداکثر ۲ است. آیا الزاماً این درست است که اگر این اعداد را بطور دلخواه دور یک دایره قرار دهیم، آن‌گاه دو عدد همسایه وجود دارند که اختلاف آن‌ها حداکثر ۲ است، برای

الف) $N = 50$. [۳ امتیاز]

ب) $N = 25$. [۵ امتیاز]

۵. ۱۵ سکه با ظاهر یکسان داریم. می‌دانیم یکی از سکه‌ها ۱ گرم، دو تا از سکه‌ها هرکدام ۲ گرم، سه تا از سکه‌ها هرکدام ۳ گرم، چهار تا از سکه‌ها هرکدام ۴ گرم و پنج تا از سکه‌ها هرکدام ۵ گرم وزن دارند. برچسبی روی هر سکه وجود دارد که وزن آن را مشخص می‌کند. می‌توانیم دوبار روی یک ترازوی دوکفه بدون وزنه اضافی، سکه‌ها را وزن کنیم. راهی ارایه دهید که بتوان چک کرد که هیچ برچسب اشتباهی وجود ندارد. (لازم نیست که چک کنیم کدام برچسب اشتباه و کدام درست است.) [۸ امتیاز]

۶. یک مثلث متساوی الاضلاع به مثلث‌های سفید و مشکی تقسیم شده است. می‌دانیم که همه مثلث‌های سفید، قائم‌الزاویه و دوبه‌دو هم‌نهشتند و همه مثلث‌های مشکی متساوی الساقین و دوبه‌دو هم‌نهشتند. آیا این درست است که

الف) همه زوایای مثلث‌های سفید مضرب 30 درجه است؛ [۴ امتیاز]

ب) همه زوایای مثلث‌های مشکی مضرب 30 درجه است؟ [۵ امتیاز]

۷. آشپز یک تکه گوشت از یخچال برمی‌دارد؛ بچه گربه‌ها دور او جمع می‌شوند. آشپز در هر دقیقه، یک بخش از گوشت را می‌برد و به انتخاب خودش به یکی از بچه گربه‌ها می‌دهد. هر بار نسبت گوشت بریده شده به تکه موجود یکسان است. در یک لحظه، آشپز باقیمانده گوشت را در یخچال می‌گذارد. آیا آشپز می‌تواند طوری اینکار را انجام دهد که به هر بچه گربه مقدار مساوی گوشت برسد، اگر:

الف) تعداد بچه گربه‌ها برابر دو باشد؛ [۳ امتیاز]

ب) تعداد بچه گربه‌ها برابر سه باشد؟ [۷ امتیاز]

شماره گروه:

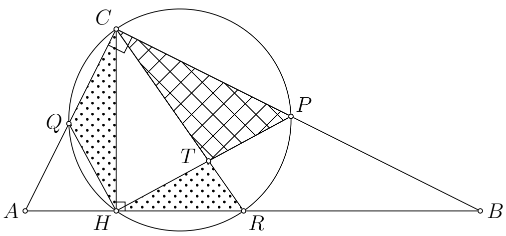
46th International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper
Spring 2025

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح پیشرفته ۱
اسفند ۱۴۰۳

Grades 8 – 9 (ages 13 – 15)

(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed up.)

points	problems	
4	1.	The teacher has chosen two different figures from $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Nick intends to find a seven-digit number divisible by 7 such that its decimal representation contains no figures besides these two. Is this possible for each teacher's choice?
5	2.	In a 2025×2025 table, several cells are marked. At each move, Cyril can get to know the number of marked cells in any checkered square inside the initial table, with side less than 2025. What is the minimal number of moves, which allows to determine the total number of marked cells for sure?
5	3.	In a triangle ABC with right angle C, the altitude CH is drawn. An arbitrary circle passing through points C and H meets the segments AC, CB and BH for the second time at points Q, P and R respectively. Segments HP and CR meet at point T. What is greater: the area of triangle CPT or the sum of areas of triangles CQH and HTR?



points	problems	
	4.	Given $2N$ real numbers. It is known that if they are arbitrarily divided into two groups of N numbers each then the products of the numbers of each group differ by 2 at most. Is it necessarily true that if we arbitrarily place these numbers along a circle then there are two neighboring numbers that differ by 2 at most, for
3	a)	$N = 50$;
5	b)	$N = 25$?
8	5.	Given 15 coins of the same appearance. It is known that one of them weighs 1 g, two coins weigh 2 g each, three coins weigh 3 g each, four coins weigh 4 g each, and five coins weigh 5 g each. There are inscriptions on the coins, indicating their weight. It is allowed to perform two weighings on a balance without additional weights. Find a way to check that there are no wrong inscriptions. (It is not required to check which inscriptions are wrong and which ones are correct.)
	6.	An equilateral triangle is dissected into white and black triangles. It is known that all white triangles are right-angled and mutually congruent, and all black triangles are isosceles and also mutually congruent. Is it necessarily true that
4	a)	all angles of white triangles are multiples of 30°;
5	b)	all angles of black triangles are multiples of 30°?
	7.	The hostess takes a piece of meat from the fridge; kittens gather around her. Each minute, the hostess cuts a part from the piece and feeds it to one of the kittens (on her choice). Each time, the cut part is in the same proportion to the current piece. At some moment, the hostess puts the rest of the meat into the fridge. Can the hostess give the same amount of meat in total to each kitten if
3	a)	the number of kittens equals two;
7	b)	the number of kittens equals three?

شماره گروه:

46th International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper
Spring 2025

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح پیشرفته ۲
اسفند ۱۴۰۳

- برای گروه‌هایی که حداقل یک نفر کلاس دهم یا یازدهم است.

-امتیاز هر گروه براساس جمع امتیاز سه سوال با بیشترین نمره بدست می‌آید.

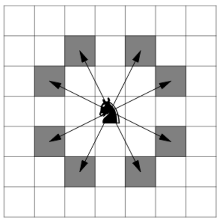
۱. آیا یک عدد مثبت $x > 1$ وجود دارد بطوریکه

$$\{x\} > \{x^2\} > \{x^3\} > \ldots > \{x^{100}\}?$$

(منظور از $\{x\}$ بخش اعشاری x یعنی اختلاف x با بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x است.) [۵ امتیاز]

۲. دو هرم با قاعده مشترک مثلث ABC داده شده است. راس آن‌ها S و R در دو طرف متفاوت از صفحه ABC قرار دارند. می‌دانیم که یال‌های SA، SB، SC از هرم اول به ترتیب موازی با وجه‌های BCR، ACR، ABR از هرم دوم هستند. ثابت کنید حجم یکی از هرم‌ها دو برابر حجم هرم دیگر است. [۶ امتیاز]

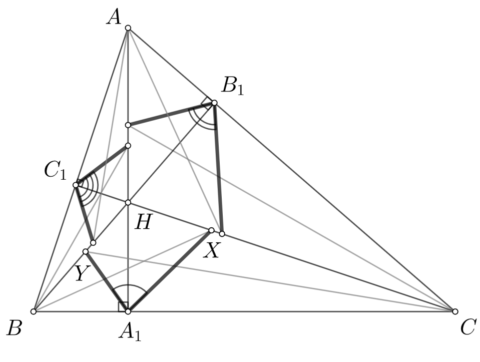
۳. آیا ممکن است که در صفحه شطرنج نامتناهی، تعداد نامتناهی مهره اسب قرار دهیم (در هر خانه حداکثر یک اسب)، بطوریکه هر اسب ۵ اسب دیگر را تهدید کند؟ (در شطرنج، مهره اسب ۸ خانه را مطابق شکل تهدید می‌کند.)



[۷ امتیاز]

۴. واحد پول یک کشور توگریک است و فقط دو نوع اسکناس با دو ارزش عدد صحیح وجود دارد. خریدار و فروشنده تعداد کافی اسکناس از هر دو نوع دارند، اما در هر معامله می‌توانند حداکثر k اسکناس استفاده کنند (شامل پولی که فروشنده به خریدار پس می‌دهد). می‌دانیم که هر مبلغ صحیح از ۱ تا n را می‌توانیم در یک معامله به این شیوه پرداخت کنیم. بیشترین مقدار n (برحسب k) چقدر است؟ [۸ امتیاز]

۵. ارتفاع‌های AA_1، BB_1 و CC_1 از یک مثلث حاده (مثلثی با زوایای کمتر از ۹۰ درجه) در نقطه H هم‌رسند. نیمسازهای زوایای B و C در مثلث BHC پاره‌خط‌های CH و BH را به‌ترتیب در نقاط X و Y قطع می‌کنند. مقدار زاویه XA_1Y را α بنامید. بطور مشابه زوایای β و γ را تعریف کنید. مجموع $\alpha + \beta + \gamma$ را پیدا کنید. [۱۰ امتیاز]



۶. بارون مونشهاوزن ادعا می‌کند که یک چندجمله‌ای $f(x)$ با ضرائب صحیح و اعداد صحیح مثبت m و n وجود دارند بطوریکه این ویژگی برقرار است: $f(m)$ مضرب n نیست اما برای هر عدد اول p و هر عدد صحیح مثبت k، $f(p^k)$ مضرب n است. آیا بارون دروغ نمی‌گوید؟ [۱۰ امتیاز]

۷. آرزو هر خانه یک جدول $2m \times 2n$ را با رنگ‌های مشکی یا سفید رنگ می‌کند، بطوریکه خانه‌های هر رنگ یک چندضلعی تشکیل می‌دهد. سپس بهرام صفحه را به دومینوها (مستطیل‌های دوخانه‌ای) تقسیم می‌کند. آرزو می‌خواهد تعداد دومینوهای دو رنگی را ماکسیمم کند و بهرام می‌خواهد این تعداد را مینیمم کند. بیشترین تعداد دومینوهای دو رنگی که آرزو می‌تواند صرف نظر از حرکات بهرام تضمین کند، چقدر است؟ (بیاد بیاورید که مرز یک چندضلعی یک خط شکسته بسته است که خودش را قطع نمی‌کند.) [۱۲ امتیاز]

شماره گروه:

46^{th} International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper
Spring 2025

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه سطح پیشرفته ۲
اسفند ۱۴۰۳

Grades 10 – 11 (ages 15 and older)

(The result is computed from the three problems with the highest scores.)

---

points problems

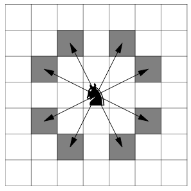
5 — 1. Does there exist a positive number $x > 1$ such that

$$\{x\} > \{x^2\} > \{x^3\} > \ldots > \{x^{100}\}?$$

(Here $\{x\}$ is the fractional part of x, that is, the difference between x and the maximal integer not exceeding x.)

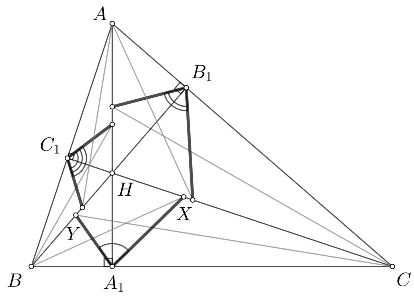
6 — 2. Given two triangular pyramids with common base ABC. Their vertices S and R are at different sides from the plane ABC. It occurs that the edges SA, SB, SC of the first pyramid are parallel to the faces BCR, ACR, ABR respectively of the second pyramid. Prove that the volume of one of the pyramids equals the doubled volume of the other one.

7 — 3. Is it possible to put an infinite number of chess knights on the infinite checkered plane (one knight in a cell at most) so that each knight takes 5 others?
(Recall that a chess knight takes 8 cells as is shown in the picture.)



8 — 4. The currency of some country is tugrik, and there are only banknotes of two integer denominations. Both the seller and the buyer have sufficiently many banknotes of both denominations, but in every payment they have to use together k banknotes at most (including change from the delivered sum). It is known that any integer sum from 1 to n tugriks can be paid at once in such a way. What is the maximal possible n (depending on k)?

10 — 5. The altitudes AA_1, BB_1, CC_1 of an acute-angled triangle ABC intersect at point H. The bisectors of angles B and C of triangle BHC meet the segments CH and BH at points X and Y respectively. Denote the value of the angle XA_1Y by α. Define β and γ similarly. Find the sum $\alpha + \beta + \gamma$.



10 — 6. Baron Munchausen asserts that there exist a polynomial $f(x)$ with integer coefficients and positive integers m and n such that the following property holds: $f(m)$ is not a multiple of n, but $f(p^k)$ is a multiple of n for every prime p and for every positive integer k. Isn't Baron wrong?

12 — 7. Alice paints each cell of a $2m \times 2n$ board black or white so that the cells of each color form a polygon. Then Bob dissects the board into dominoes (rectangles consisting of two cells). Alice wants to maximize the number of two-colored dominoes, and Bob wishes to minimize it. What maximal number of two-colored dominoes can be guaranteed by Alice regardless of Bob's moves?
(Recall that the boundary of a polygon is a closed broken line without self-intersections.)