

خلاصه مقاله «There is more to examples than meets the eye: Thinking with and through mathematical examples in different settings»

نویسنده: Orit Zaslavsky, ۲۰۱۷

۱. مقدمه

هدف اصلی مقاله، ارائه تصویری کلی از پژوهش‌های انجام‌شده درباره نقش و کاربرد مثال‌ها در یادگیری و تفکر ریاضی، به‌ویژه در یادگیری مفاهیم و فرایند اثبات، و همچنین ارائه چارچوبی برای سازمان‌دهی و دسته‌بندی بخشی از این پژوهش‌هاست. نویسنده معتقد است مثال‌ها بخش بسیار مهمی از تفکر و یادگیری ریاضی هستند؛ اما اهمیت مثال فقط در «دیدن یک نمونه» نیست، بلکه در چگونگی استفاده، تولید، انتخاب و تفسیر آن نهفته است. پرسش اساسی مقاله این است که دانش‌آموز یا یادگیرنده در چه موقعیتی با مثال سروکار دارد و چه کسی مثال را ایجاد یا انتخاب می‌کند.

مهم‌ترین دستاورد مقاله، معرفی و تمایز میان سه موقعیت استفاده از مثال است:

۱. استفاده خودجوش از مثال (Spontaneous example-use)
۲. استفاده برانگیخته از مثال (Evoked example-use)
۳. استفاده واکنشی از یک مثال ارائه‌شده (Responsive example-use to a provided example)

در دو حالت اول، منبع اصلی مثال خود دانش‌آموز یا یادگیرنده است؛ اما در حالت سوم، مثال از سوی یک منبع بیرونی، مانند معلم، پژوهشگر یا کتاب درسی، ارائه می‌شود. این سه موقعیت را می‌توان در انواع مختلف یادگیری به کار برد، اما نویسنده در این مقاله بیشتر بر نقش آنها در شکل‌گیری مفاهیم تمرکز دارد و در کنار آن به کاربرد مثال‌ها در حدس‌زدن، حل مسئله و اثبات نیز اشاره می‌کند.

نویسنده برای توضیح این سه موقعیت، از چند نمونه پژوهش‌محور استفاده می‌کند: در موقعیت اول، دانش‌آموزان در جریان یک فعالیت خودشان مثال‌هایی تولید می‌کنند؛ در موقعیت دوم، از معلمان ریاضی خواسته می‌شود مثال‌های متعددی از توابع دوره‌ای تولید کنند؛ و در موقعیت سوم، مثالی هندسی از یک «میانۀ مثلث» ارائه می‌شود که دانش‌آموز آن را متفاوت از منظور معلم تفسیر می‌کند. در واقع، مقاله از این ایده دفاع می‌کند که برای فهم نقش مثال در یادگیری ریاضی باید به رابطه میان «مثال»، «ذهن یادگیرنده» و «هدف آموزشی» توجه کنیم.

۲. چرا با مثال‌ها سروکار داشته باشیم؟

نویسنده ابتدا نشان می‌دهد که در سال‌های اخیر توجه پژوهشگران آموزش ریاضی به نقش مثال‌ها افزایش یافته است. مثال‌ها نه تنها در آموزش ریاضی، بلکه در بسیاری از فرایندهای شناختی مانند استدلال قیاسی، استدلال استقرایی، شکل‌گیری مفهوم، تعمیم، انتزاع و یادگیری از مثال‌های حل‌شده نقش دارند. در ریاضیات نیز مثال‌ها در فرایندهایی مانند یادگیری مفهوم، حل مسئله، حدس‌زدن و اثبات اهمیت دارند. حتی در فعالیت ریاضیدانان حرفه‌ای، مثال‌ها می‌توانند برای بررسی ایده‌ها، کشف الگوها و شکل‌گیری حدس‌های جدید مورد استفاده قرار گیرند.

از دیدگاه آموزشی نیز مثال‌ها یکی از اجزای اساسی یک توضیح خوب محسوب می‌شوند. اما یک مثال منفرد معمولاً کافی نیست. برای یادگیری مناسب، لازم است چند مثال ارائه شود که دامنه‌ای از ویژگی‌های مهم مفهوم را پوشش دهند و ویژگی‌هایی که باعث می‌شوند یک نمونه، مثال آن مفهوم باشد، برای یادگیرنده قابل مشاهده باشند. بنابراین ارزش آموزشی مثال به تعداد آنها محدود نمی‌شود؛ بلکه کیفیت انتخاب و نحوه استفاده از آنها اهمیت دارد. با وجود این، استفاده از مثال‌ها همیشه سودمند نیست. نویسنده به دو خطر مهم اشاره می‌کند:

نخست، دانش‌آموز ممکن است بیش از حد به نمونه‌های تیپیک یا معمول یک مفهوم وابسته شود و تصور کند ویژگی‌های ظاهری همان نمونه، جزء ضروری مفهوم است.

دوم، دانش‌آموز ممکن است در فرایند اثبات بیش از حد به مثال‌ها تکیه کند و یک یا چند نمونه را به جای استدلال عمومی و اثبات ریاضی بپذیرد. بنابراین مسئله اصلی این نیست که «آیا باید از مثال استفاده کرد یا نه»، بلکه این است که «چه مثالی، در چه زمانی، با چه هدفی و به چه شیوه‌ای استفاده شود».

۳. ویژگی‌های مثال‌های ریاضی

نویسنده در این بخش به این پرسش می‌پردازد که اساساً «مثال» چیست. از دیدگاه ریاضی، مثال می‌تواند شیئی باشد که شرایط مشخصی را برآورده می‌کند یا نماینده‌ای از یک طبقه از اشیا باشد. اما از دیدگاه نویسنده، این تعریف کافی نیست. برای اینکه یک شیء برای یک فرد واقعاً «مثال» محسوب شود، فرد باید بتواند به این پرسش پاسخ دهد: «این، مثال چه چیزی است؟» یعنی فرد باید بتواند مشخص کند که این نمونه، موردی از چه ویژگی، مفهوم، اصل، ایده یا پدیده‌ای است. در نتیجه، مثال فقط یک شیء ریاضی نیست؛ بلکه به درک فرد از آن شیء نیز وابسته است. یک شیء زمانی برای فرد به عنوان مثال عمل می‌کند که او آن را به عنوان نمونه‌ای از یک مفهوم یا ویژگی خاص ببیند. از اینجا نویسنده به یک ویژگی مهم مثال‌ها می‌رسد: جنبه ذهنی یا ادراکی مثال.

هر مثال علاوه بر ویژگی‌هایی که قرار است مفهوم را نشان دهند، ویژگی‌های دیگری نیز دارد که برای هدف موردنظر مهم نیستند. /سکمپ این ویژگی‌های نامرتبط را «نویز» می‌نامد. بنابراین یادگیرنده باید بتواند ویژگی‌های اصلی را از ویژگی‌های فرعی جدا کند. این مسئله در هندسه اهمیت بیشتری دارد. برای مثال، نمی‌توان یک «مثال کاملاً عمومی» را روی کاغذ رسم کرد؛ زیرا هر مثلث رسم‌شده ویژگی‌های خاصی خواهد داشت. ممکن است متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین یا مختلف‌الاضلاع به نظر برسد. این ویژگی‌های ظاهری می‌توانند باعث شوند دانش‌آموز آنها را جزء ویژگی‌های ضروری مفهوم مثلث تلقی کند.

از این رو، در آموزش ریاضی باید هم ویژگی‌های ریاضی مثال و هم نحوه برداشت دانش‌آموز و هدف معلم از ارائه آن در نظر گرفته شود.

نویسنده سپس دو ویژگی مهم یک مثال آموزشی مناسب را مطرح می‌کند:

شفافیت (Transparency): مثال باید به گونه‌ای باشد که دانش‌آموز بتواند ویژگی‌هایی را که باعث می‌شوند آن شیء یک مثال از مفهوم موردنظر باشد، تشخیص دهد.

قابلیت تعمیم (Generalization): مثال باید علاوه بر نشان دادن یک حالت خاص، به دانش‌آموز کمک کند ویژگی‌های اساسی و قابل تعمیم مفهوم را از ویژگی‌های خاص و تغییرپذیر آن جدا کند.

یک مثال مناسب می‌تواند به عنوان «نمونه مرجع» یا «نمونه الگو» در موقعیت‌های بعدی نیز مورد استفاده قرار گیرد و به دانش‌آموز در فهم نکات ظریف ریاضی کمک کند. در اینجا ایده «مثال عمومی» یا «Generic Example» نیز مطرح می‌شود؛ یعنی مثالی خاص که به شکلی انتخاب یا پردازش شده باشد که دانش‌آموز بتواند از طریق آن ایده‌ای عمومی‌تر را مشاهده کند. در نتیجه، «مثال بودن» یک ویژگی کاملاً عینی و مستقل از فرد نیست؛ بلکه تا حدی به این بستگی دارد که فرد چه چیزی را در آن مثال می‌بیند و چگونه آن را تفسیر می‌کند.

۴. تصویر مفهوم و فضای مثال

یکی از ایده‌های مهم مقاله، استفاده از دو مفهوم «تصویر مفهوم (Concept Image)» و «فضای مثال (Example Space)» برای بررسی درک افراد از مفاهیم ریاضی است.

فضای مثال به مجموعه مثال‌هایی گفته می‌شود که فرد در یک زمان و موقعیت مشخص، با یک مفهوم ریاضی مرتبط می‌داند یا می‌تواند به آنها دسترسی پیدا کند. فضای مثال فقط فهرستی از مثال‌ها نیست. مثال‌های موجود در این فضا با یکدیگر ارتباط دارند و ساختاری درونی تشکیل می‌دهند. بنابراین مهم است که فرد چه مثال‌هایی را در اختیار دارد و این مثال‌ها چگونه به یکدیگر و به مفهوم مربوط می‌شوند.

این ایده با مفهوم «تصویر مفهوم» که توسط وینر و تال مطرح شده است ارتباط نزدیکی دارد. تصویر مفهوم مجموعه ساختارهای شناختی، تصاویر ذهنی، ویژگی‌ها و فرایندهایی است که فرد با یک مفهوم خاص مرتبط کرده است. تصویر مفهوم در طول زمان و بر اثر تجربه‌های مختلف شکل می‌گیرد و تغییر می‌کند. بنابراین درک یک مفهوم ثابت نیست و ممکن است تجربه یک مثال جدید، بخش خاصی از تصویر مفهوم را فعال یا گسترش دهد.

فضای مثال نیز پویاست. ممکن است فرد مثال‌هایی داشته باشد که در ذهن او وجود دارند، اما در یک لحظه خاص به آنها دسترسی آسان نداشته باشد. یک مثال جدید که توسط خود فرد یا فرد دیگری مطرح می‌شود می‌تواند باعث فعال شدن بخش دیگری از فضای مثال شود. برای مثال، در یک فعالیت گروهی ممکن است یک دانش‌آموز مثالی ارائه کند و همین مثال باعث شود دانش‌آموزان دیگر به نوع دیگری از مثال‌ها فکر کنند. مقایسه مثال‌های مختلف نیز می‌تواند فضای مثال را غنی‌تر کند.

از این دیدگاه، محدود بودن فضای مثال می‌تواند بر توانایی فرد در فهم و استفاده از یک مفهوم تأثیر بگذارد. بنابراین یکی از اهداف آموزش می‌تواند گسترش فضای مثال دانش‌آموز باشد؛ یعنی دانش‌آموز فقط چند نمونه آشنا و مشابه در ذهن نداشته باشد، بلکه بتواند نمونه‌های متنوع‌تر و کمتر آشنا را نیز در ارتباط با مفهوم تولید یا تشخیص دهد. نویسندگان از «تصویر مفهوم» و «فضای مثال» به عنوان شاخص‌هایی برای بررسی درک مفاهیم استفاده می‌کنند. اگر استفاده از مثال باعث شود فضای مثال فرد گسترده‌تر شود یا ارتباط‌های جدیدی میان مثال‌ها و تعریف مفهوم ایجاد شود، می‌توان گفت درک او از مفهوم تغییر کرده است.

۵. سه موقعیت استفاده از مثال

پژوهش درباره مثال‌ها نتایج یکسانی نداشته است. برخی پژوهش‌ها نشان داده‌اند که تولید مثال می‌تواند به فهم بهتر مفاهیم و حل مسائل کمک کند، در حالی که برخی پژوهش‌های دیگر هشدار داده‌اند که صرفاً درخواست از دانش‌آموز برای تولید مثال، لزوماً به یادگیری یا اثبات بهتر منجر نمی‌شود. نویسندگان برای توضیح این تفاوت‌ها، سه موقعیت اصلی استفاده از مثال را از یکدیگر جدا می‌کنند.

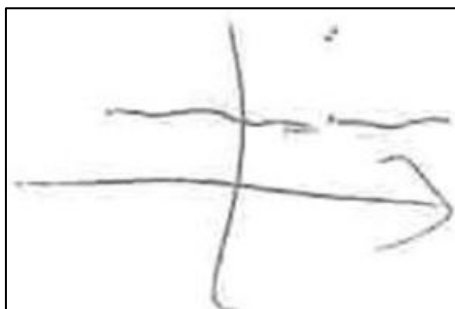
۱-۵. استفاده خودجوش از مثال

در این حالت، دانش‌آموز بدون اینکه معلم مستقیماً از او بخواهد مثال تولید کند، در جریان حل مسئله، بررسی یک حدس یا تلاش برای اثبات، خودش به سراغ مثال می‌رود. این نوع استفاده از مثال معمولاً زمانی رخ می‌دهد که دانش‌آموز با نوعی عدم قطعیت مواجه است؛ مثلاً نمی‌داند یک گزاره درست است یا نادرست، یا در حل مسئله راه‌حل آماده‌ای در اختیار ندارد. مثال در چنین شرایطی می‌تواند وسیله‌ای برای بررسی ایده، پیدا کردن ضدنمونه، شکل دادن به حدس یا نزدیک شدن به ساختار مسئله باشد.

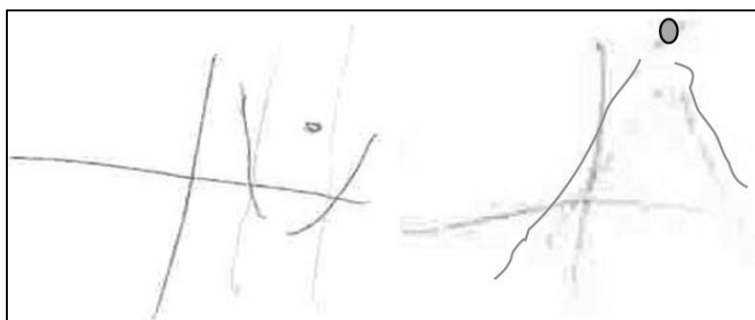
نویسندگان برای توضیح این موقعیت از پژوهشی درباره درک دانش‌آموزان دبیرستانی از یک تعریف ریاضی استفاده می‌کنند. دانش‌آموزان با تولید مثال‌های خودشان، برداشت‌هایشان از تعریف را آشکار می‌کنند. از طریق مثال‌هایی که آنها به صورت خودجوش انتخاب می‌کنند می‌توان فهمید کدام ویژگی‌های مفهوم برایشان برجسته است و چه برداشت‌هایی از آن دارند. این موضوع نشان می‌دهد که مثال‌های خودجوش علاوه بر نقش یادگیری، نقش تشخیصی نیز دارند. یعنی معلم یا پژوهشگر می‌تواند از مثال‌هایی که دانش‌آموز به طور طبیعی انتخاب می‌کند، اطلاعاتی درباره تفکر او به دست آورد.

در حوزه حدس و اثبات نیز استفاده خودجوش از مثال اهمیت دارد. دانش‌آموز ممکن است با بررسی چند نمونه به یک الگو پی ببرد، یک حدس بسازد یا حتی با پیدا کردن یک ضدنمونه نادرستی یک گزاره را نشان دهد. نکته مهم این است که استفاده خودجوش از مثال تصادفی و بی‌هدف نیست. نوع مسئله و طراحی فعالیت باید به گونه‌ای باشد که نیاز به بررسی مثال را در ذهن دانش‌آموز ایجاد کند.

یکی از نمونه‌های پژوهشی مقاله مربوط به دانش‌آموزانی است که درباره تعریف یک مفهوم ریاضی بحث می‌کردند. در یکی از بحث‌ها، گزاره‌ای درباره تعریف نقطه ماکزیمم نسبی مطرح شد. یکی از دانش‌آموزان برای مخالفت با آن، تابعی خاص ارائه کرد و نمودار آن را ترسیم کرد. این مثال باعث شد دیگر اعضای گروه نیز مثال‌های دیگری بیاورند. در نهایت یکی از دانش‌آموزان که ابتدا گزاره را پذیرفته بود، نظر خود را تغییر داد. او متوجه شد که قبلاً تصویر ذهنی خود را به توابع پیوسته محدود کرده بود، در حالی که مفهوم ماکزیمم نسبی می‌تواند درباره توابع ناپیوسته نیز مطرح شود.



این نمونه نشان می‌دهد که مثال فقط برای «تأیید» یک ایده استفاده نشده است؛ بلکه مثال باعث تغییر خود تصور دانش‌آموز از مفهوم شده است. تصویر زیر مربوط به مثال دیگر تولید شده برای بررسی و به چالش کشیدن همین ایده «ماکزیمم نسبی» است.



۲-۵. استفاده برانگیخته از مثال

در این حالت، معلم یا فعالیت آموزشی دانش‌آموز را به سمت تولید یا انتخاب مثال هدایت می‌کند، اما خود مثال‌ها را برای او تعیین نمی‌کند. یکی از نمونه‌های اصلی مقاله، کارگاه آموزشی با حضور معلمان ریاضی دوره متوسطه است که در آن از شرکت‌کنندگان خواسته شد مثال‌های متعددی از «تابع متناوب» تولید کنند. در ابتدا شرکت‌کنندگان مثال‌های آشنا و نسبتاً تیپیک ارائه کردند. پس از چند مثال، دیگر مثال جدیدی به ذهنشان نمی‌رسید. همین محدودیت باعث شد آنها به حوزه‌های دیگری فکر کنند و به تدریج مثال‌های جدیدتری بسازند. تصویر زیر، یک شبه‌تعریف از تابع متناوب را نشان می‌دهد:

A periodic function is a function that can be constructed in the following way: Divide the x -axis into equal-length segments, such as for example..., $[-39, -26]$, $[-26, -13]$, $[-13, 0]$, $[0, 13]$, $[13, 26]$, $[26, 39]$, ... Take any of these segments, no matter which one, and define a function on it, no matter how (e.g., as in Fig. 1).



Fig. 1

Then define another function on the whole x -axis, such that on each segment it behaves in the same way as the first function (as in Fig. 2).

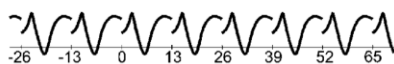
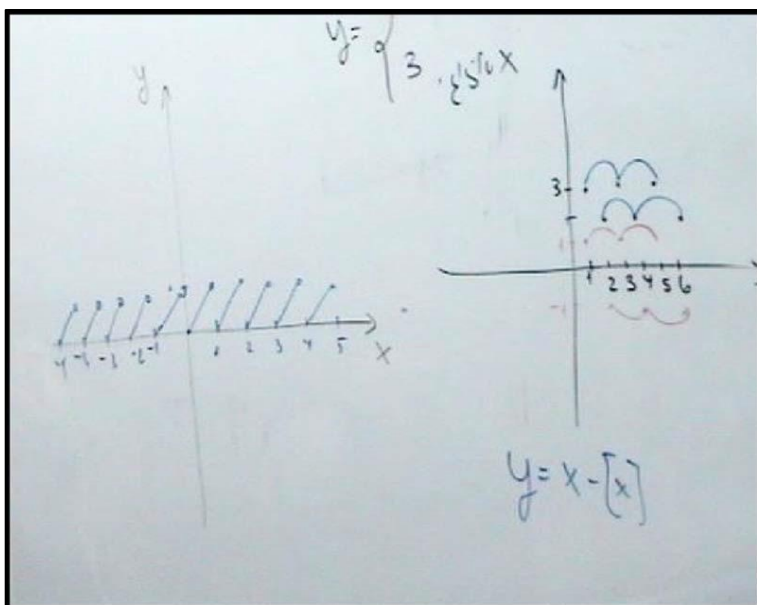
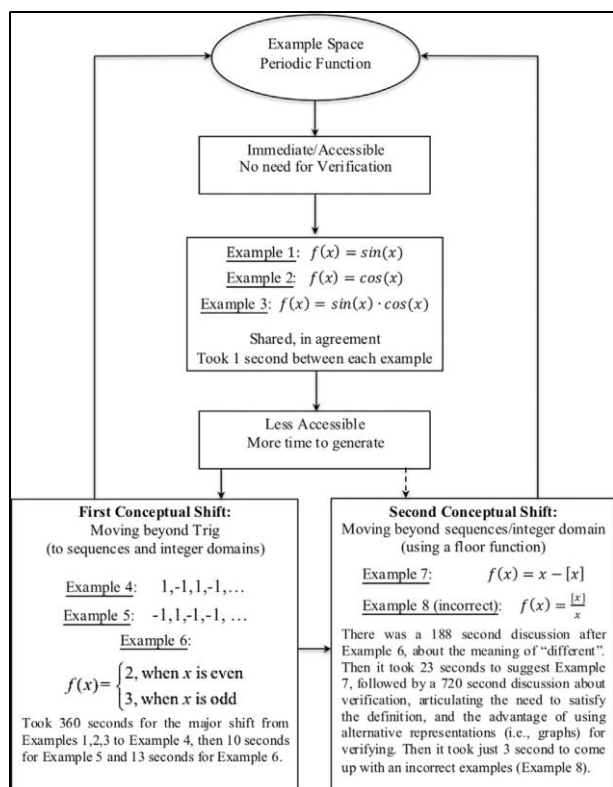


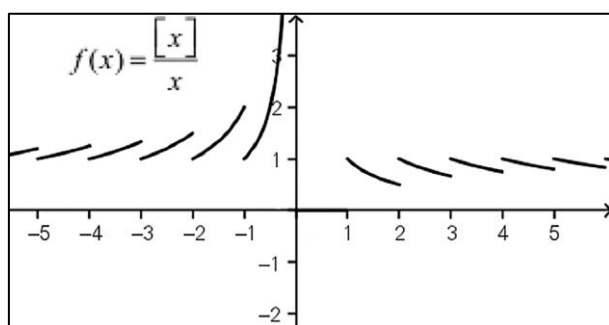
Fig. 2

Then the new function is a periodic function. Its values are repeated regularly.

در ابتدا مثال‌ها عمدتاً از توابع مثلثاتی بودند. سپس گروه به مثال‌هایی خارج از این حوزه رسید و این تغییر باعث گسترش فضای مثال آنها شد. مثال‌های بعدی پیچیده‌تر شدند و گروه مجبور شد درباره این پرسش فکر کند که آیا نمونه پیشنهادی واقعاً تابع دوره‌ای است یا خیر. در برخی موارد برای بررسی مثال‌ها از نمایش نمادی و در موارد دیگر از نمایش گرافیکی استفاده کردند.

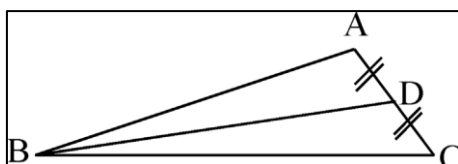


در یکی از موارد، گروه ابتدا نمی‌توانست تشخیص دهد که مثال ارائه‌شده تابع دوره‌ای هست یا خیر. بعداً با رسم نمودار توانستند تشخیص دهند که آن مثال در واقع تابع دوره‌ای نیست. این نمونه نشان می‌دهد که تولید مثال می‌تواند به طور طبیعی نیاز به بررسی تعریف را ایجاد کند. دانش‌آموز ابتدا مثال می‌سازد، سپس مجبور می‌شود بررسی کند آیا مثال واقعاً شرایط تعریف را دارد یا نه. از نظر نویسنده، نقش معلم در این محیط بسیار مهم است، اما نقش او بیشتر «برانگیختن و هدایت فرایند» است تا ارائه مستقیم مثال. معلم باید از دانش‌آموزان بخواهد مثال‌های بیشتری تولید کنند و آنها را به سمت مثال‌هایی متفاوت از نمونه‌های قبلی سوق دهد. نکته کلیدی این بخش آن است که یادگیری مهم‌تر زمانی رخ می‌دهد که دانش‌آموز از مثال‌های آشنا و در دسترس خود فراتر می‌رود.

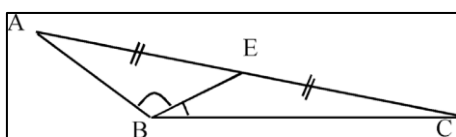


۳-۵. استفاده واکنشی از یک مثال ارائه‌شده

در این حالت، مثال از سوی فرد دیگری، مانند معلم، پژوهشگر یا کتاب درسی، ارائه می‌شود و دانش‌آموز باید آن را تفسیر و بررسی کند. پژوهش‌های مربوط به یادگیری از مثال‌های حل‌شده نشان می‌دهند که استفاده از چند مثال متفاوت می‌تواند به دانش‌آموز کمک کند ساختارهای عمیق‌تر را ببیند و صرفاً به ویژگی‌های ظاهری توجه نکند. همچنین انتخاب دقیق مثال‌ها و غیرمثال‌ها می‌تواند به دانش‌آموز کمک کند ویژگی‌های ضروری و غیرضروری یک مفهوم را از یکدیگر جدا کند. اما این نوع استفاده از مثال یک مشکل اساسی دارد: معلم ممکن است قصد خاصی از ارائه مثال داشته باشد، در حالی که دانش‌آموز ممکن است چیز دیگری را در آن ببیند. نویسنده برای نشان دادن این مسئله از یک مثال هندسی استفاده می‌کند. در درس هندسه، معلم برای معرفی مفهوم «میان‌ه‌مثلث» شکلی را ارائه کرد.



پس از مشاهده شکل، دانش‌آموز نتیجه گرفت که هر میانه مثلث، نیمساز زاویه نیز هست. این برداشت ناشی از ویژگی خاص شکل ارائه‌شده بود؛ یعنی دانش‌آموز اطلاعات بصری موجود در شکل را به عنوان بخشی از مفهوم در نظر گرفته بود. معلم سپس شکل را تغییر داد و مثال دیگری ارائه کرد.



این مثال نشان می‌دهد که در مثال‌های هندسی، اطلاعات بصری می‌تواند بسیار مبهم باشد. دانش‌آموز ممکن است ویژگی‌هایی را از شکل استنباط کند که معلم قصد نداشته است آنها را جزء اطلاعات مسئله تلقی کند. بنابراین در ارائه مثال هندسی باید به این مسئله توجه کرد که دانش‌آموز دقیقاً چه چیزی را از شکل مشاهده و استنباط می‌کند. نویسندگان سپس نمونه دیگری از یک «مثال عمومی» را برای توضیح قاعده بخش‌پذیری بر ۳ مطرح می‌کنند:

$$471 = 4 \times 100 + 7 \times 10 + 1 \times 1 = 4 \times (99 + 1) + 7 \times (9 + 1) + 1 \times 1 = 4 \times 99 + 7 \times 9 + (4 + 7 + 1) = 3 \times (4 \times 33 + 7 \times 3) + (4 + 7 + 1)$$

این مثال می‌تواند به دانش‌آموز کمک کند ساختار کلی قاعده را از طریق یک نمونه خاص مشاهده کند؛ یعنی ببیند چرا مجموع رقم‌ها در تعیین بخش‌پذیری بر ۳ نقش دارد. با این حال، نویسندگان اشاره می‌کنند که حتی در چنین مثالی، انتخاب اعداد و ویژگی‌های ظاهری مثال می‌تواند بر میزان شفافیت ساختار اثر بگذارد. در نتیجه، ارائه یک مثال «خوب» به تنهایی کافی نیست. باید بررسی کرد که دانش‌آموز واقعاً چه چیزی را از مثال برداشت می‌کند.

۶. بحث

در بخش پایانی، نویسندگان سه موقعیت مطرح‌شده را از منظر میزان ابتکار دانش‌آموز با یکدیگر مقایسه می‌کنند. در استفاده خودجوش، بیشترین میزان ابتکار مربوط به دانش‌آموز است؛ زیرا خود او مثال را تولید یا انتخاب می‌کند. در استفاده برانگیخته نیز مثال توسط دانش‌آموز تولید می‌شود، اما معلم یا فعالیت آموزشی او را به سمت تولید مثال هدایت می‌کند. در استفاده واکنشی، مثال از یک منبع بیرونی ارائه می‌شود و دانش‌آموز باید با آن کار کند؛ بنابراین در رابطه با تولید یا انتخاب مثال، میزان ابتکار دانش‌آموز کمتر است.

این تفاوت را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

- استفاده خودجوش ← بیشترین ابتکار دانش‌آموز
- استفاده برانگیخته ← ابتکار هدایت‌شده
- استفاده واکنشی ← کمترین ابتکار در تولید یا انتخاب مثال

البته نویسندگان تأکید می‌کنند که این مقایسه فقط درباره «منبع و تولید مثال» است. دانش‌آموز ممکن است در مراحل دیگر کار با مثال، مانند تحلیل یا استدلال، ابتکار زیادی داشته باشد.

یکی از مهم‌ترین نتایج مقاله این است که دو حالت خودجوش و برانگیخته می‌توانند نقش تشخیصی داشته باشند. مثال‌هایی که دانش‌آموز خودش تولید می‌کند می‌توانند نشان دهند که او یک مفهوم، مسئله یا اثبات را چگونه می‌بیند. در عین حال، حالت برانگیخته می‌تواند فراتر از تشخیص عمل کند و باعث گسترش فهم دانش‌آموز شود. در مثال تابع دوره‌ای، درخواست برای تولید مثال‌های بیشتر و متفاوت باعث شد شرکت‌کنندگان از مثال‌های آشنا عبور کنند، ارتباط‌های قوی‌تری میان تعریف مفهوم و تصویر مفهوم خود ایجاد کنند و فضای مثال خود را گسترش دهند. بنابراین مثال‌ها می‌توانند هم «شاخصی از فهم موجود» باشند و هم «وسیله‌ای برای ایجاد فهم جدید».

نویسندگان این موضوع را با نظریه فرایند دوگانه در شناخت نیز مرتبط می‌کنند. در این دیدگاه، می‌توان استفاده برانگیخته از مثال را حرکتی از پاسخ‌های سریع، شهودی و در دسترس به سمت تفکر آگاهانه‌تر، تحلیلی‌تر و نیازمند تلاش بیشتر دانست. در مثال تابع متناوب، هرچه شرکت‌کنندگان از مثال‌های آشنا دورتر می‌شدند، برای تولید و بررسی مثال‌های جدید زمان و تلاش بیشتری لازم داشتند. در مورد مثال‌های ارائه‌شده نیز، مسئله اصلی

این است که دانش‌آموز الزاماً همان چیزی را نمی‌بیند که معلم در مثال می‌بیند. حتی اگر معلم مثال را برای نشان دادن یک ایده عمومی انتخاب کرده باشد، ممکن است دانش‌آموز ویژگی‌های نامرتبط آن را برجسته کند. این مسئله در مثال میانه مثلث به وضوح دیده می‌شود: معلم قصد داشت مفهوم میانه را نشان دهد، اما دانش‌آموز ویژگی دیگری را از شکل برداشت کرد و آن را با مفهوم میانه مرتبط ساخت.

از این رو، طراحی مثال آموزشی نیازمند توجه به «نویز» مثال و ویژگی‌هایی است که ممکن است دانش‌آموز به اشتباه آنها را مهم تلقی کند. نویسنده همچنین به مفهوم «مثال عمومی» اشاره می‌کند. یک مثال عمومی باید به اندازه‌ای مشخص باشد که بتوان با آن کار کرد، اما در عین حال بتواند ایده‌ای فراتر از همان نمونه خاص را نشان دهد. با این حال، اینکه یک مثال برای معلم «عمومی و شفاف» به نظر برسد، تضمین نمی‌کند که دانش‌آموز نیز همان ویژگی عمومی را در آن مشاهده کند.

موضوع مهم دیگر، زمان ارائه مثال است. نویسنده به «اصل ضرورت» اشاره می‌کند. در پروژه «Examples Project»، پژوهشگر معمولاً مثال طراحی‌شده را زمانی ارائه می‌کرد که دانش‌آموز قبلاً مدتی با مسئله کار کرده و در حل آن به بن‌بست رسیده بود. در این شرایط، دانش‌آموز ابتدا تلاش کرده بود با مثال‌های خودش پیش برود و پس از مواجه شدن با دشواری، مثال ارائه‌شده از سوی پژوهشگر می‌توانست برای او معنا و ضرورت بیشتری پیدا کند. بنابراین ارائه مثال در زمان مناسب اهمیت دارد. یک مثال ممکن است اگر خیلی زود ارائه شود، فرصت تولید و بررسی مثال‌های شخصی را از دانش‌آموز بگیرد؛ در حالی که ارائه همان مثال پس از ایجاد یک نیاز واقعی ممکن است نقش آموزشی بیشتری داشته باشد. در حوزه اثبات نیز مثال‌ها محدودیت‌هایی دارند. یک مثال خاص به خودی خود اثبات نمی‌کند که یک گزاره برای همه موارد درست است. همچنین پذیرش یک استدلال مبتنی بر مثال عمومی به سطح تحصیلی، جامعه ریاضی و معیارهای مورد انتظار برای «اثبات» بستگی دارد.

در پایان، نویسنده تأکید می‌کند که هدف آموزش ریاضی نباید صرفاً استفاده بیشتر از مثال‌ها باشد، بلکه باید نوعی «تفکر مثال‌محور» ایجاد شود؛ یعنی یادگیرنده بداند چه زمانی و چگونه از مثال‌ها برای شکل‌دهی مفهوم، تفکر انتقادی، حدس‌زدن، حل مسئله و اثبات استفاده کند. پیام‌نهایی مقاله این است که مثال‌ها ابزارهایی بسیار قدرتمند برای یادگیری و تفکر ریاضی‌اند، اما اثر آنها به نحوه استفاده از آنها وابسته است. بنابراین لازم است هم قابلیت‌های مثال‌ها و هم محدودیت‌های آنها شناخته شود.

در یک جمع‌بندی کوتاه، سه موقعیت مقاله را می‌توان چنین بیان کرد:

۱. مثال را خود دانش‌آموز و بدون درخواست مستقیم تولید می‌کند ← استفاده خودجوش
۲. معلم یا فعالیت آموزشی دانش‌آموز را به تولید مثال وادار می‌کند، اما مثال را خودش تعیین نمی‌کند ← استفاده برانگیخته
۳. معلم، پژوهشگر یا کتاب یک مثال ارائه می‌کند و دانش‌آموز باید آن را تفسیر کند ← استفاده واکنشی

از دید نویسنده، بررسی این تفاوت‌ها به ما کمک می‌کند بفهمیم مثال‌ها چگونه می‌توانند هم برای شناخت وضعیت فعلی تفکر دانش‌آموز و هم برای گسترش و تغییر آن به کار روند. بنابراین، «تفکر با مثال‌ها و از طریق مثال‌ها» باید بخشی از دانش و مهارت یادگیری و تدریس ریاضی باشد؛ نه به این معنا که مثال جایگزین استدلال ریاضی شود، بلکه به این معنا که مثال به عنوان ابزاری برای مشاهده، تولید ایده، بررسی، تعمیم، حدس‌زدن و رسیدن به استدلال مورد استفاده قرار گیرد.

خلاصه‌سازی مقاله: ChatGPT

تنظیم متن و تهیه فایل ورد: علی قربانی