

قطع درختان برای کریسمس



دور مقدماتی ای-لیمپیاد، ۲ آذر ۱۴۰۳

Wiskunde in
teams



راهنمای مسائل دور مقدماتی ای-لیمپیاد ریاضی ۱۴۰۳

این مرحله از مسابقه ای-لیمپیاد شامل ۵ تکلیف (۳ تکلیف مقدماتی، ۱ تکلیف میانی و ۱ تکلیف نهایی) است. همه ی اطلاعات و بینش به دست آمده در ۴ تکلیف اول می توانند (و باید) در تکلیف نهایی استفاده شوند.

توصیه های کلی برای کار کردن روی این مسائل:

- ابتدا متن همه ی تکالیف را بخوانید تا دقیقاً بدانید چه کارهایی باید انجام دهید.
- ممکن است لازم باشد برای تکالیف فرضیاتی اضافی در نظر بگیرید. توضیح و توجیه روشنی برای فرضیاتتان ارائه دهید.
- استفاده از نرم افزار صفحه گسترده (مانند اکسل) برای این تکلیف دور مقدماتی توصیه می شود.
- تکالیف بر اساس یکدیگر ساخته و به هم مربوط می شوند: شما به آنچه در یک تکلیف آموخته اید در تکلیف بعدی نیاز خواهید داشت ... بنابراین کار را تقسیم نکنید بلکه همه چیز را با هم انجام دهید!
- حواستان به زمانی که برای تکالیف اول صرف می کنید، باشد. زمان زیادی را برای تکلیف نهایی باقی بگذارید.
- در تکلیف پایانی زیاد به خودتان آسان نگیرید... بالاخره این همان تکلیفی است که شما را از بقیه متمایز می کند!
- اگر در حین انجام تکالیف در رویکرد، روش یا روند بررسی تان تغییراتی دادید حتما در گزارش خود این تغییرات را نوشته و دلایل ایجاد تغییرات را شرح دهید.
- فهرستی از منابع (اینترنتی) که استفاده کردید، بیاورید.

آنچه تحویل می دهید:

- ✓ تکلیف نهایی
- ✓ ۴ تکلیف مقدماتی، به عنوان پیوست

داوری:

این ها بخشی از نکاتی است که داوران در نظر می گیرند:

- واضح و منطقی بودن پاسخ تکلیف نهایی،
- میزان کامل بودن پاسخ ها،
- استفاده از ریاضیات،
- استدلال ها و توجیه انتخاب های انجام شده،
- عمق و دقت پاسخ ها،
- نحوه ارائه: قالب و ظاهر، انسجام، خوانایی، ساختار و چگونگی استفاده و به کارگیری پیوست ها و ...
- خلاقیت (ریاضی) در بسط دادن مسائل.

خوش بگذره و موفق باشید!

معرفی مسئله:

در آمبرهاون، مردم کریسمس را با شور و شوق جشن می‌گیرند. تعداد زیادی درخت کریسمس "واقعی" برای جشن برپا می‌شود. مردم یک درخت کریسمس می‌خرند تا در خانه بگذارند و شهرداری درختان بزرگی را می‌خرد که در مکانی از شهر قرار دهد. در نتیجه، چندین پرورش دهنده درخت کریسمس در اطراف آمبرهاون وجود دارد: آمبر کریسمس یکی از آنهاست. در این مسئله، ما چندین سال شرکت آمبر کریسمس را دنبال می‌کنیم.

تکالیف مقدماتی

آمبر کریسمس دارای زمینی است که در آن ۳۰۰۰ درخت کریسمس می‌توانند رشد کنند. این شرکت درختان را به سه دسته درختان کوچک، متوسط و بزرگ طبقه‌بندی می‌کند. بلافاصله پس از کریسمس ۲۰۲۰، ۱۰۰۰ درخت در هر دسته باقی‌مانده بود.

از روی تجربه، پرورش دهنده می‌داند که درختان در یک دوره (تقریباً) یک ساله با چه سرعتی رشد می‌کنند: ۴۰٪ درختان کوچک متوسط می‌شوند، بنابراین ۶۰٪ کوچک باقی می‌مانند. ۲۰٪ درختان متوسط بزرگ می‌شوند. درختان بزرگ، بزرگ باقی می‌مانند.

۱. اطلاعات فوق را به صورت گرافیکی (شکل یا نمودار یا ...) نمایش دهید.

۲. ترکیب جنگل پس از یک سال، حدود کریسمس ۲۰۲۱ چگونه خواهد بود؟

۳. اگر قرار باشد که پرورش دهنده هیچ کاری انجام ندهد، یعنی درختی را قطع نکند یا درخت جدیدی نکارد، جنگل در نهایت فقط از درختان بزرگ تشکیل خواهد شد. یک تخمین منطقی ارائه دهید که جنگل پس از چند سال به این وضعیت خواهد رسید.

تکلیف میانی

آمبر کریسمس به درختان در هر دسته نیاز دارد. پرورش دهنده می‌خواهد یک وضعیت رشد و فروش پایدار ایجاد کند. او از خود می‌پرسد که چگونه می‌تواند درختان کریسمس را به مطلوب‌ترین شکل ممکن قطع کند و دوباره درخت بکارد. او سه استراتژی (راهبرد) زیر را در نظر می‌گیرد:

الف - پس از ۱ سال، چند درخت متوسط و بزرگ را برای فروش قطع کند و سپس درختان کوچک را دوباره بکارد تا دوباره ۱۰۰۰ درخت در هر دسته وجود داشته باشد.

ب - فقط بعد از ۲ سال تعدادی درخت متوسط و بزرگ را قطع کند و درختان کوچک را دوباره بکارد تا دوباره ۱۰۰۰ درخت در هر دسته وجود داشته باشد.

ج - پس از ۱ سال فقط درختان بزرگ را قطع کند (به طوری که ۱۰۰۰ درخت باقی بماند) و دوباره به همان تعداد درخت کوچک بکارد. پس از سال دوم، فقط درختان بزرگ (بیش از ۱۰۰۰) را قطع کند و دوباره همان تعداد درخت کوچک بکارد.

درختان بزرگ در هنگام فروش دو برابر درختان متوسط سود دارند. از نظر آمبر کریسمس درختان کوچک برای فروش مناسب نیستند.

۴. در مورد اینکه کدام یک از سه استراتژی در بلندمدت بهترین انتخاب است به پرورش دهنده توصیه‌های مستدل ارائه دهید.

تکلیف نهایی:

آمبرهاون در سال ۲۰۲۵ گسترش بیشتری خواهد یافت و گل‌خانه‌ی آمبر کریسمس باید نقل مکان کند. مساحت زمین جدید برای درختان به اندازه زمین قدیمی است، بنابراین دوباره ۳۰۰۰ درخت کریسمس می‌توانند در آنجا رشد کنند. این جابجایی، موقعیت جدیدی ایجاد می‌کند: درختان جدید باید کاشته شوند و می‌توان استراتژی جدیدی برای قطع و کاشت (طرح قطع و کاشت) ایجاد کرد.

شرکت آمبر کریسمس تصمیم می‌گیرد نوع دیگری درخت بکارد: "نراد^۱ آمبر". این پرورش دهنده قبل از جابه‌جایی دو کار انجام داده است: بررسی رشد درخت نراد و بررسی خریدهای مشتریان خود.

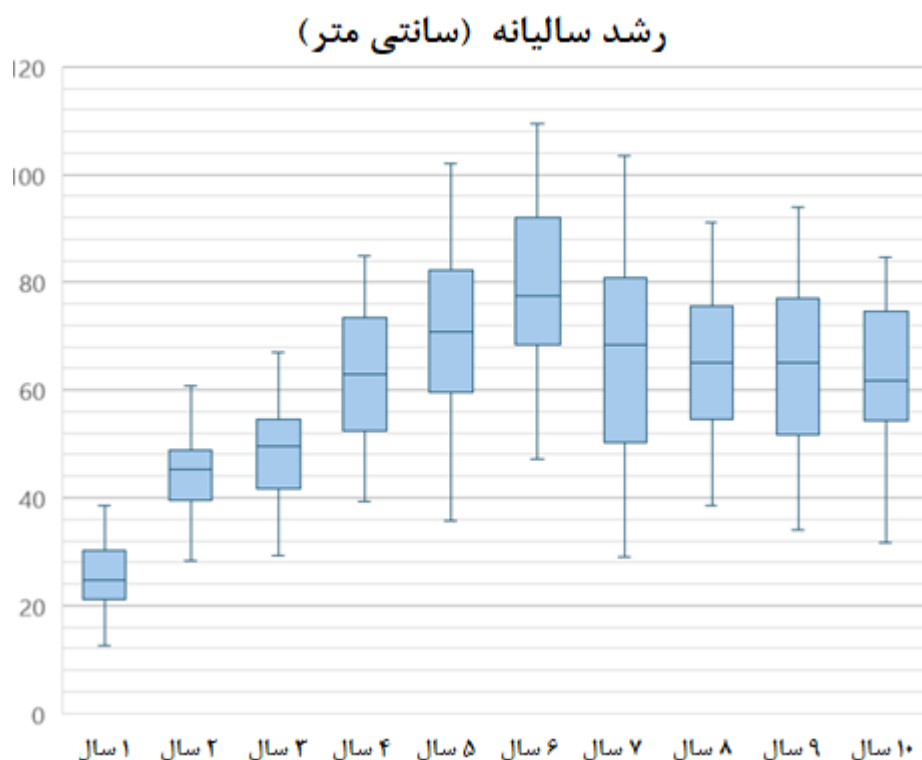
رشد نراد آمبر:

جدول زیر میانگین ارتفاع یک درخت نراد را در ۱۰ سال اول رشدش نشان می‌دهد.

ارتفاع درخت به سانتی‌متر	سن درخت به سال
۲۶	۱
۷۰	۲
۱۱۹	۳
۱۸۱	۴
۲۵۳	۵
۳۳۱	۶
۳۹۸	۷
۴۶۳	۸
۵۲۷	۹
۵۸۹	۱۰

^۱ درخت نراد نوعی کاج است که بعنوان درخت کریسمس استفاده می‌شود.

نمودار زیر نرخ رشد یک نراد آمبر را در طی ۱۰ سال نشان می‌دهد. همه درخت‌ها با سرعت یکسانی رشد نمی‌کنند، به همین دلیل است که نمودار از جعبه‌ها تشکیل شده است. هر جعبه از ۴ چارک تشکیل شده است که هر کدام شامل ۲۵ درصد درختان است.



در نمودار جعبه‌ای، می‌توانید برای مثال میزان رشد درختان ۳ ساله را بخوانید:

- ۲۵ درصد در سال چهارم بین ۳۹ تا ۵۳ سانتی‌متر رشد کردند.
- ۲۵ درصد در سال چهارم بین ۵۳ تا ۶۳ سانتی‌متر رشد کردند.
- ۲۵ درصد در سال چهارم بین ۶۳ تا ۷۲ سانتی‌متر رشد کردند.
- ۲۵ درصد در سال چهارم بین ۷۲ تا ۸۵ سانتی‌متر رشد کردند.

نظرسنجی از مشتریان

در نظرسنجی از مشتریان این سؤال پرسیده شد که مشتریان، درخت کریسمس را با چه ارتفاعی ترجیح می‌دهند. این داده‌ها با داده‌های فروش سال‌های گذشته ترکیب شده است. این‌ها نتایج (گرد شده) هستند:

- حدود ۲۵ درصد درختی کوچکتر از ۱.۲۰ متر می‌خواهند.
- حدود ۶۵ درصد درختی بین ۱.۵۰ تا ۲.۵۰ متر می‌خواهند.
- حدود ۱۰ درصد درختی بلندتر از ۴ متر می‌خواهند.

اکثر مشتریان در نظرسنجی نشان دادند که اگر درخت دیگری باقی نماند، مایل به خرید درخت کمی بزرگتر یا کمی کوچکتر هستند.

در نهایت، خواسته مشتریان این است که یک قیمت برای هر دسته از درختان (متوسط و بزرگ) وجود نداشته باشد، بلکه قیمت باید بر اساس ارتفاع درخت تعیین شود: هر چه درخت بلندتر باشد، قیمت بالاتر باشد.

تکلیف نهایی

در پاییز ۲۰۲۵، آمبر کریسمس زمین جدید را می‌کارد. آنها می‌توانند درختان ۱، ۲ یا ۳ ساله بکارند. آنها می‌خواهند بتوانند درختان را قبل از کریسمس ۲۰۲۶ بفروشند (یعنی ۱ سال پس از کاشت). آنها انتظار دارند که یک برنامه قطع و کاشت داشته باشند که حداکثر تا ۵ سال بعد پایدار شود و به آنها امکان برآورده کردن خواسته‌های مشتری‌ها را بدهد. برنامه‌ای برای آمبر کریسمس تهیه کنید. برنامه کاشت ۲۰۲۵ را ارائه دهید و فروش (قطع) و کاشت جدید را برای سال‌های بعدی تعیین کنید. مطمئن شوید که برنامه قطع و کاشت حداکثر پس از ۵ سال پایدار می‌شود و آمبر کریسمس می‌تواند تمام خواسته‌های مشتری را برآورده کند.

در هر حالت موارد زیر را در نظر داشته باشید:

- آمبر کریسمس (در نهایت) هر سال به ۵۰۰ درخت برای فروش نیاز دارد.

تذکر: منظور از در نهایت، پس از رسیدن به پایداری است. در واقع در نهایت به معنای ماکزیمم درختان نیست.

- حداکثر ۳۰۰۰ درخت می‌تواند در این قطعه رشد کند.

- آمبر کریسمس می‌خواهد از همان ابتدا خواسته‌های حاصل از نظرسنجی مشتری‌ها را تا حد امکان برآورده کند.

- آمبر کریسمس می‌تواند هر سال درختانی را با سن ۱، ۲ یا ۳ سال بکارد.

- قیمت درختانی که می‌کارند به سن (و در نتیجه قد) آن‌ها بستگی دارد: هر چه مسن‌تر (بلندتر)، گران‌تر.

- حداکثر بعد از ۵ سال می‌خواهند هر سال از برنامه قطع و کاشت یکسان استفاده کنند. در سال‌های قبل از آن، برنامه قطع و کاشت ممکن است سال به سال تغییر کند.

گزارشی بنویسید که به طور واضح و بصری برنامه‌ریزی و نتایج را برای آمبر کریسمس از سال ۲۰۲۵ به بعد توضیح دهد و اثبات کند.

ای-لیمپید ریاضی ابتکاری از سوی مؤسسه فرودنتال در دانشگاه اوترخت است. کمیته ای-لیمپید مسئول سازماندهی و طراحی تکالیف ای-لیمپید است. این کمیته شامل افراد زیر است:

Marcel Daems

Gymnasium Sorghvliet, The Hague

Tom Goris

Fontys Teacher Training, Tilburg

Dédé de Haan

Freudenthal Institute, Utrecht University

Senta Haas

Städtisches Gymnasium Hennef, Hennef, Germany

Kim Kaspers

Lyceum Sancta Maria, Haarlem

Johan van de Leur

Mathematical Institute, Utrecht University

Ruud Stolwijk

CITO, Arnhem; Vrijeschool Zutphen VO, Zutphen

Monica Wijers

Freudenthal Institute, Utrecht University

Secretariat:

Mariozee Wintermans

Freudenthal Institute, Utrecht University

سی و ششمین دوره مسابقه ای-لیمپید ادای احترامی است به یان د لانگ، کسی که بنیان گذار "ای-لیمپید" بود.

WiT wordt gesponsord door:



CALCULO