فصل چهارم

جبر در اسلام

بخش ۱. مسائلی در باب کمیتهای مجهول

بسیاری از آثار ریاضی قدیمی مشتمل بر مسائلی‌اند که خواهان کشف کمیتی مجهول هستند. گاهی از اوقات این مجهول، کمیتی هندسی است که تحت شرایط مسئله به‌مقادیر معلوم مرتبط می‌شود، مثالی از این نوع، قضیهٔ دوم مقالهٔ دوم *اصول* اقلیدس راجع به‌تقسیم قطعه خط مفروض AB به‌دو قطعهٔ AG و GB است به‌طوری که [مساحت] مستطیلی با اضلاع AB و GB با [مساحت] مربعی به‌ضلع AG برابر باشد (شکل ۴ – ۱). در اینجا یک مقدار معلوم، AB، و یک قطعه خط مجهول، AG، وجود دارد زیرا $GB = AB - AG$، و شرط $AB \cdot GB = AG^2$ را داریم. خواننده به‌یاد خواهد آورد که این کار، تقسیم یک پاره‌خط به«بخش طلایی» است که در فصل ۳ در بحثمان راجع به‌مسئلهٔ ۵ رسالهٔ ابوالوفا در مورد محاط کردن یک پنج ضلعی در یک دایره دربارهٔ آن گفتگو کردیم.

مثالی دیگر در قضیهٔ ۴، *مقالهٔ* دوم کتاب *در باب کره و استوانه* ارشمیدس دیده می‌شود، که در آن ارشمیدس مسئلهٔ بریدن کره‌ای را با صفحه‌ای که نسبت حجمهای دو قطعهٔ حاصل برابر نسبت مفروضی باشد حل می‌کند. در هر دو مسئلهٔ فوق مقدار مجهول یک کمیت هندسی است، ولی مثالهایی که در آنها کمیت مجهول یک عدد باشد، فراوانند. به‌عنوان مثال، در یک متن میخی که در بین‌النهرین، به‌هنگام فرمانروایی جانشینان اسکندر کبیر بر این ناحیه، نوشته شده است مسئله‌ای موجود است که خواستار عددی است که چون به‌معکوسش اضافه شود، عدد مفروضی را بدهد. مدتها پیش از این تاریخ، در زمانی به‌قدمت ۱۸۰۰ سال قبل از میلاد، کاتبین بابلی قادر به‌حل مسائلی بودند که به‌معادلات درجهٔ دوم منجر می‌شد،



شکل ۴-۱

و، گرچه بابلیها به‌جای «$x^۲ + ۶x = ۲۷$» می‌گفتند «من مساحت مربعم را به‌شش برابر ضلع آن اضافه کرده‌ام و حاصل ۲۷ شده است» روشی را برای حل این مسئله به‌کار می‌بردند که اساساً همان است که امروزه به‌کار می‌بندیم.

روشهای عددی بابلیها مجدداً در آثار نویسندگان یونانی، هرون (رونقش در ۶۰ بعد از میلاد) و دیوفانتوس (رونقش در ۳۰۰ بعد از میلاد) دیده می‌شوند، که در آنها گاهی از اوقات بیش از یک مجهول مورد نظر است. موردی از آن، مسئلهٔ زیر است که به‌توسط دیوفانتوس در *علم حساب*[۱] حل شده است. مطلوب است سه عدد (گویا) به‌طوری که حاصل‌ضرب هر دوی آنها به‌اضافهٔ سومی مربع کامل باشد. در موارد دیگر، مجهول یگانه‌ای مقید به‌چندین شرط مورد نظر است، مانند مسئلهٔ زیر که در آثار بهاسکره، نویسندهٔ هندی حوالی ۱۱۵۰ میلادی [۵۲۹ هجری] دیده می‌شود: «کدام عدد است، که، چون بر ۶ تقسیم شود، باقیمانده‌اش ۵ و چون بر ۵ تقسیم شود باقیمانده‌اش ۴، و چون بر ۴ تقسیم شود باقیمانده‌اش ۳، و چون بر ۳ تقسیم شود، باقیمانده‌اش ۲ است؟»

ولی در نزد بسیاری از نویسندگان یونانی، نحوهٔ پرداختن به‌مسئلهٔ یافتن مجهولات، هندسی بوده است. مثلاً اقلیدس در تقسیم قطعه خط به«بخش طلایی» به‌صورت هندسی با مسئلهٔ حل معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ + ax = a^۲$ سروکار دارد؛ زیرا، هرگاه فرض کنیم $AB = a$ و $AG = x$ (شکل ۴ – ۱)، آن‌گاه شرط $AB \cdot GB = AG^۲$ به $a(a - x) = x^۲$ تبدیل می‌شود و از این نتیجه می‌شود که $a^۲ = ax + x^۲$. و این مستلزم آن است که با مفروض بودن قطعه خطی به‌طول a قطعه خطی به‌طول x بسازیم به‌طوری که $x^۲ + ax = a^۲$. اما، اقلیدس به‌مفهوم عددی «طول یک قطعه خط» نمی‌اندیشد، بلکه به‌جای آن وی به$x^۲ + ax = x(x + a)$ به‌عنوان مستطیلی که دارای اضلاع x و $x + a$ است می‌نگرد، او وقتی قضیهٔ ۶ مقالهٔ دوم *اصول* خود را به‌کار می‌برد عملاً «مربع را کامل می‌کند»، به‌این معنی که اگر مربعی به ضلع $\frac{a}{۲}$ به‌این مستطیل، $x(x + a)$، اضافه شود، نتیجه [مساحت] مربعی به‌ضلع $x + \frac{a}{۲}$ است. در این صورت، x مساوی با ضلع این مربع منهای مقدار معلوم $\frac{a}{۲}$ است.

مورد «بخش طلایی» تنها یکی از مثالهایی از این دست است که هندسه‌دانان یونانی دوران کلاسیک چگونه به‌روابط درجه دومی مانند $x^۲ + ax = a^۲$ به‌عنوان احکامی دربارهٔ مساحتها می‌نگریستند. آنها برای بررسی این احکام، مجموعه‌ای از قضایا، مانند قضایای مقاله دوم، *اصول* را در اختیار داشتند که به‌آنها اجازه می‌داد این مساحتها را کامل کرده مربعهای معلومی ایجاد کنند که اضلاع آنها قطعه خطهای مطلوب را به‌دست دهند. به‌اعتقاد بسیاری از محققان دلیل تاریخی تأکید یونانیان بر هندسه این است که در حل معادلات درجهٔ دوم اعداد گنگی، از قبیل $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۵}$ ناگزیر پیش می‌آیند. چون یونانیان حتی تعریفی برای این اعداد نداشتند، قادر نبودند دقیقاً به‌آنها بپردازند و در نتیجه هر موقع که طالب استدلالهای دقیق بودند، خود کمیتهای هندسی را به‌کار می‌بردند.

۱ـ Arithmetica

بخش ۲. منابع جبر اسلامی

جملگی این بخشهای ریاضیات یونانی را ریاضیدانان دورهٔ اسلامی می‌دانستند. ترجمهٔ کتاب اقلیدس به‌توسط حجاج [ابن مطر] دراواخر سدهٔ هشتم میلادی [دوم هجری] چندین ترجمهٔ پیراسته به‌دنبال داشت، و سرانجام، به‌ترجمهٔ ثابت بن قره در سدهٔ نهم میلادی [سوم هجری] منجر شد. ثابت همچنین به‌تجدید نظر در ترجمهٔ ناقص *کره و استوانهٔ* ارشمیدس که پیشتر صورت گرفته بود، همت گماشت و بنابراین این اثر نیز از سدهٔ دهم میلادی [چهارم هجری] به‌صورت عربی پاکیزه‌ای در دسترس بود. بالاخره هفت مقالهٔ نخست کتاب *علم حساب* دیوفانتوس به‌توسط قسطابن لوقابعلبکی (بعلبک شهری است در لبنان کنونی)، احتمالاً در نیمهٔ سدهٔ نهم میلادی [سوم هجری] به عربی ترجمه شد. هم قسطا و هم ابوالوفا هر دو بر این اثر شرحهایی نوشتند.

منبع مهم دیگر جبر اسلامی تمدّن هندی بود، که از سدهٔ پنجم میلادی به‌بعد شواهد فراوانی از یک ریاضیات پیشرفته در این تمدّن در دست است. مشابهتهای زیادی در سنت شمارش بین ریاضیدانان هندی و یک نویسندهٔ یونانی، مثل دیوفانتوس، موجودند. هر دو حروف اختصاری به‌جای مجهولات به‌کار می‌بردند؛ ولی، در حالی که دیوفانتوس تنها یک حرف اختصاری را به‌کار می‌برد، نویسندگان هندی از چندین حرف اختصاری یعنی از اولین هجای کلمات سانسکریت برای رنگهای مختلف استفاده می‌کردند. نویسندگان هندی علامت خاصی برای نشان دادن اعداد منفی داشتند، و دیوفانتوس، نیز، علامت خاصی برای تفریق داشت. بالاخره، هم دیوفانتوس و هم هندیان به معادلات نامعین [معادلات سیاله] علاقه‌مند بودند، یعنی، معادلاتی چند مجهولی که امکان دارد تعدادی نامتناهی جواب داشته باشند.

یکی از اولین و بزرگترین ریاضیدانان هندی برهمگوپته[1] بود، که در نیمهٔ اول سدهٔ هفتم میلادی، [سدهٔ اول هجری] می‌زیست و دو فصل از بیست و چهار فصل اثر نجومی‌اش، *برهمسپهوته ـ سدهانته*[2]، به ریاضیات اختصاص دارد. در این اثر، برهمگوپته آشکارا قواعدی برای ضرب اعداد علامتدار بیان می‌کند و تشخیص می‌دهد که جوابهای برخی از مسائلش ممکن است منفی باشند. وی در عرضهٔ جوابهای عمومی معادله‌ای که ما اینک به‌صورت $ax + by = c$ می‌نویسیم و جوابهای آن را به‌صورت $x = p + mb$ و $y = q - ma$ که در آن $x = p$، $y = q$ یک جواب خاص، و m عدد صحیح دلخواهی است بیان می‌کنیم، از آریبهطهٔ اول (رونقش در ۵۰۰ بعد از میلاد) پیروی می‌کند. وی همچنین نشان می‌دهد که چگونه باید برای یافتن جوابهای خاص p و q، از آنچه که «آلگوریتم اقلیدسی» می‌نامیم، استفاده کند. مثلاً $5x + 12y = 29$ دارای جواب [خاص] $x = 1$، $y = 2$ است و جواب عمومی عبارت است از $x = 1 + 12m$، $y = 2 - 5m$. او همچنین دربارهٔ مسئلهٔ مشکل حل $x^2 = 1 + py^2$، که امروزه به‌معادلهٔ پل[3] موسوم است، بحث می‌کند.

مسلمین در اوایل تاریخ خود از دستاوردهای هندی در جبر آگاه شدند، زیرا اثر نجومی برهمگوپته

۱ـ Brahmagupta ۲ـ Brahmasphuta-siddhanta ۳ـ Pell

یکی از آثاری بود که فضلای هندی برای منصور خلیفه در ۷۷۰ میلادی [۱۴۹ هجری] به‌ارمغان آوردند، و این اثر به توسط فزاری به‌عربی ترجمه شد. آثار نجومی سانسکریتی (شاید به‌خاطر سهولت در حفظ کردن) به‌صورت نظم نوشته شده بودند، و از این لحاظ ترجمهٔ آنها برای فزاری محتملاً کار ساده‌ای نبوده است. برای مثال، بیرونی به‌این عادت مترجمان اولیه منابع هندی اشاره می‌کند که برخی از واژه‌ها را بدون ترجمه، تنها با تلفّظ آنها به‌زبان عربی، نقل کرده‌اند.

ریاضیدانان اسلامی به‌قدر پیشینیان بابلی و هندی خود مستعد بودند که کارایی روشهای عددی را که این اقوام برای حل معادلات درجهٔ دوم یا معادلات نامعین داشتند درک کنند. همان‌گونه که دیده‌ایم، آنان هم وارث دستگاه شصتگانی بابلیها بودند و هم وارث دستگاه اعشاری هندیان، و این دستگاههای کارا، شالودهٔ خوبی را برای ریاضیات عددی فراهم آوردند.

از طرف دیگر، رهیافت هندسی یونانی مورد تأیید صاحب‌نامانی بود که غالب علمای اسلامی آنان را سخت می‌ستودند، و در ضمن صحت این قواعد هندسی بدون هیچ تردیدی محقق شده بود. در این رهیافت تنها امتحان کردن عددی که جواب مسئله باشد مطرح نبود بلکه نظریه‌ای عمومی مبتنی بر اصول موضوعه‌ای معتبر درکار بود که برهانهایی برای درستی روشها را در اختیار می‌گذاشتند.

در بخش آتی چگونگی تلفیق این رهیافت عددی و هندسی برای ابداع یک علم جدید را خواهیم دید.

بخش ۳. جبر خوارزمی

نام «جبر»

از درون این میراث دوگانهٔ حل مسائلی که خواستار یافتن مجهولات عددی و هندسی بودند، تمدّن اسلامی علمی را ابداع کرد که نام جبر را بر آن نهاد. منشاء خود این کلمه، کلمهٔ عربی «الجبر» است، که در عنوان بسیاری از آثار عربی به‌عنوان بخشی از عبارت «الجبر و المقابله» ظاهر می‌شود. یک معنی «جبر» «به جای خود برگرداندن» یا «جبران» است، و خوارزمی جبردان سدهٔ نهم میلادی [سوم هجری]، اگر چه همواره یکسان عمل نمی‌کند، این اصطلاح را برای نشان دادن عمل به‌جای خود بردن مقداری که از یک طرف معادله کم شده به‌طرف دیگر تا به‌مقداری مثبت بدل شود، به‌کار می‌برد. مثلاً قرار دادن $۲ = ۱ + ۸x$ به‌جای $۳x - ۲ = ۱ + ۵x$ مثالی از «جبر» خواهد بود. «و» همان واو عطف است، و «جبر» را به‌کلمهٔ «مقابله» الحاق می‌کند؛ «مقابله» خود در این مضمون به‌معنی گذاشتن تفاضل دو جملهٔ همجنس، که در دو طرف معادله‌ای قرار دارند، در طرفی است که مقدار بزرگتر در آن قرار دارد. مثلاً قرار دادن $۸x = ۱$ به‌جای $۲ = ۱ + ۸x$ مثالی از «مقابله» خواهد بود.

به وضوح، با این دو عمل، هر معادلهٔ جبری به‌معادله‌ای تبدیل خواهد شد که در آن مجموعی از جملات مثبت در یک طرف برابر است با صفر یا مجموعی از جملات مثبت که متضمن توانهای مختلف xاند. بالاخص، هر معادلهٔ درجهٔ دوم با یک ریشهٔ مثبت به یکی از سه صورت استانداردِ زیر قابل تحویل

است:

$$px^2 + qx = r \quad \text{یا} \quad ، \quad px^2 + r = qx \quad ، \quad px^2 = qx + r$$

که در آن p ، q ، و r جملگی مثبتند ، و این شرطی است که در سراسر ریاضیات اسلامی دورهٔ میانی اعمال می‌شود . این شرط را مجدداً در اثر «عمر خیام» خواهیم دید ، و این قاعده تا اوایل سدهٔ شانزدهم در ریاضیات غربی نیز حکمفرماست . بنابراین علم «جبر و مقابله» در آغاز خود ، علم تبدیل معادلات متضمن یک یا چند مجهول به یکی از صور استانداردِ فوق و سپس حل معادله در این صورت بود .

مفاهیم اساسی در جبر خوارزمی

یکی از نخستین نویسندگان در علم جبر ، محمّدبن‌موسی خوارزمی بود که به‌رساله‌اش در حساب هندی در فصل ۲ اشاره شد . اثر او در جبر ، *مختصر من حساب‌الجبر و المقابله* نه تنها در دنیای اسلام ، بلکه در دنیای غرب لاتین نیز در سطح وسیعی رواج یافت .

بنابرگفته خوارزمی سه نوع کمیت وجود دارد : *اعداد ساده* مانند ۲ ، ۱۳ ، و ۱۰۱ ، و سپس *ریشه* که مجهول ، x ، است ، یعنی باید در یک مسئلهٔ خاص معین شود ، و سومی *دارایی* که مربع ریشه است و در عربی به‌آن *مال* گویند[۱] . (از مزایای احتمالی اینکه جملهٔ مربع را نمایندهٔ دارایی تصورکنیم آن بوده است که خوارزمی بتواند جملهٔ عدد را به عنوان درهم ، واحد پول محلی ، تعبیرکند .) کلمهٔ دیگری که برای «ریشه» به‌توسط بسیاری از نویسندگان به‌کار رفته «شئ» است . در قالب این اصطلاحات ، خوارزمی توانست شش نوع اساسی از معادلات را به‌صورت زیر فهرست کند :

(۱) جذرهایی معادل عددی است $(nx = m)$.

(۲) مالهایی معادل جذرهایی است $(x^2 = nx)$.

(۳) مالهایی معادل عددی است $(x^2 = m)$.

(۴) معادلهٔ بین مالها و عدد با جذرها $(m + x^2 = nx)$.

(۵) معادلهٔ بین مالها و جذرها با عدد $(m = nx + x^2)$.

(۶) معادلهٔ بین جذرها و عدد با مالها $(x^2 = m + nx)$.

هر معادله که فقط متضمن سه کمیت اساسی بوده و جوابی مثبت داشته باشد قابل تبدیل به‌یکی از این سه نوع است ؛ تنها معادله‌هایی که خوارزمی به‌آنها می‌پردازد .

بحث خوارزمی راجع به $x^2 + 21 = 10x$

برای تعقیب بحثی که خوارزمی از نوع (۴) مذکور در فوق به‌عمل می‌آورد ، از نمادگذاری جدید برای نقل بیان لفظی او استفاده خواهیم کرد . وی این نوع معادله را در قالب مثال خاص $x^2 + 21 = 10x$ ، که آن را به‌صورت «مالی و ۲۱ [درهم]معادل ۱۰ جذر آن است» توصیف می‌کند ، به‌صورت زیر مورد بحث قرار

۱ـ در اصطلاح خوارزمی عدد ساده ، ریشه ، دارایی به‌ترتیب عبارتند از عدد مفرد ، جذر ، مال . ـم .

می‌دهد .

تعداد ریشه‌ها را نصف می‌کنی . می‌شود ۵ [جذر]. این پنج را در خودش ضرب می‌کنی که می‌شود ۲۵ . پس عدد ۲۱ [راکه به‌جملهٔ مال اضافه شده] از آن کم می‌کنی ، ۴ باقی می‌ماند . جذر ۴ را استخراج می‌کنی که ۲ می‌شود ، این عدد را از نصف تعداد ریشه‌ها ، یعنی ۵ ، کم می‌کنی ، ۳ باقی می‌ماند . این عدد جذر [= ریشهٔ] مالی است که می‌خواستی ، و خود مال ۹ است . و اگر بخواهی می‌توانی این جذر را به‌نصف تعداد ریشه‌ها بیفزایی ، که ۷ می‌شود . این عدد جذر [= ریشهٔ] مالی است که می‌خواستی ، و خود مال ۴۹ خواهد بود .

توجه کنید که اولین روش خوارزمی صرفاً توصیفی لفظی از دستور

$$\frac{۱۰}{۲} - \sqrt{(\frac{۱۰}{۲})^۲ - ۲۱}$$

است و روش دوم او توصیفی از محاسبهٔ «$\sqrt{۵^۲ - ۲۱} + ۵$» است ، ولی چون همهٔ مقادیر به‌مقتضای نقشی که در مسئله دارند هر جا نامی می‌گیرند (مثلاً ، «۵» «تعداد جذرها» خوانده می‌شود) ، توصیف وی در مورد جواب ، گرچه فشردگی جواب امروزی ، یعنی $\frac{n}{۲} \pm \sqrt{(\frac{n}{۲})^۲ - m}$ را ندارد ، ولی به‌همان اندازه کلی است .

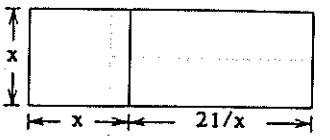
در واقع کلیت بحث خوارزمی در توضیحاتی که متعاقب عبارات فوق می‌آید منعکس است :

هرگاه با موردی مواجه شدی که به‌این حالت برمی‌گردد ، درستی [جوابش را] با افزودن امتحان کن ، اگر نتیجه نداد ، کم کردن به‌نتیجه خواهد رسید . در این حالت می‌توانی هم افزودن را و هم کم کردن را به‌کار بری ، [ولی] آن را در دیگر حالات سه‌گانه ، که تعداد جذرها [= ریشه‌ها] را باید نصف کرد ، نمی‌توان به‌کار گرفت .

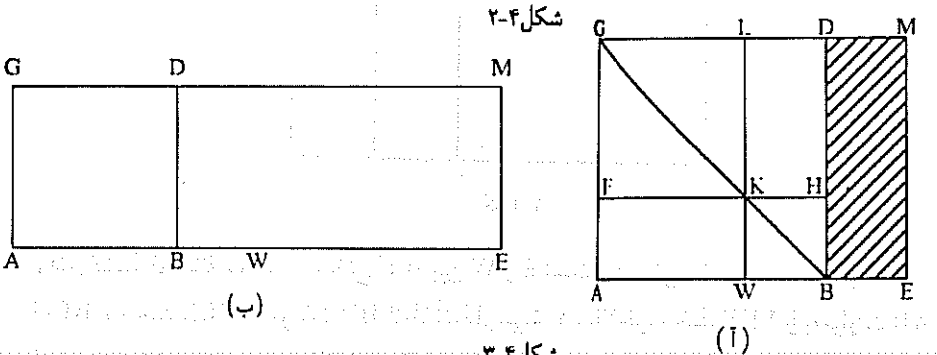
همچنین بدان که هنگامی ، در مسئله‌ای که به‌این حالت منجر می‌شود ، نصف عدد جذرها [= ریشه‌ها] را در خودش ضرب کرده‌ای ، هرگاه حاصل‌ضرب کوچکتر از تعداد درهمهای افزوده شده به‌مال گردد ، آنگاه این حالت غیر ممکن است . از طرف دیگر ، هرگاه حاصل‌ضرب با خود درهمها برابر باشد ، آنگاه جذر [= ریشه] نصف عدد جذرها [= ریشه‌ها] است .

در پاراگراف اول بالا ، خوارزمی تشخیص می‌دهد که حالتی که با آن سروکار داریم تنها حالتی است که می‌تواند دو ریشهٔ مثبت داشته باشد . وی در پاراگراف دوم متذکر می‌شود که هرگاه آنچه را که مبیّن می‌نامیم از صفر کوچکتر باشد جوابی وجود ندارد و می‌افزاید که در حالت $(\frac{n}{۲})^۲ = m$ یگانه جواب $\frac{n}{۲}$ است . بالاخره ، متذکر می‌شود که در حالت $px^۲ + m = nx$ لازم است که همه را به p تقسیم کنیم تا $x^۲ + (\frac{m}{p}) = (\frac{n}{p})x$ به‌دست آید ، که می‌توان آن را به روش قبل حل کرد . ضمناً ، از اینجا معلوم می‌شود ضرایبی که او به‌کار می‌برد منحصر به‌اعداد صحیح نیستند .

چیزی که خوارزمی و اخلافش را از نویسندگان پیشتر از خود در مسائلی از نوع فوق متمایز می‌کند آن است ، که وی پس از اعمال روشهای یافتن جوابهای عددی ، دلایلی برای معتبر بودن این روشها ارائه می‌دهد ، دلایلی که ، به‌عنوان مثال ، $x^۲ + ۲۱$ را به‌صورت مستطیلی متشکل از مربع $(x^۲)$ که به‌مستطیلی



شکل۴-۲



شکل۴-۳

به‌اضلاع x و $\frac{۲۱}{x}$ منضم شده تعبیر می‌کند (شکل ۴ – ۲).

بخش ۴. برهان ثابت بن قره برای معادلات درجهٔ دوم

مقدمات

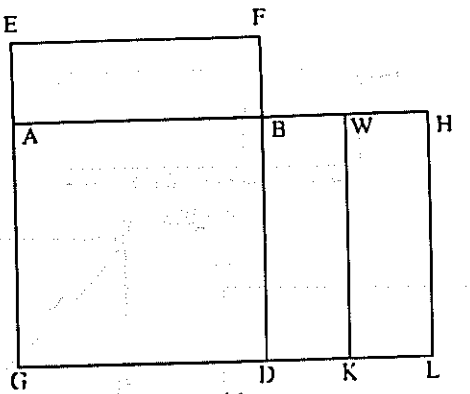
خوارزمی استدلالهای خود را در قالب معادلات خاص ارائه می‌دهد، ولی ثابت بن قره در اثرش استدلال را کلی می‌دهد، و به‌این دلیل به‌جای پیروی از خوارزمی، از او پیروی خواهیم کرد.

دو حالت اول، $x^۲ + px = q$ و $x^۲ + q = px$ به‌قدرکافی رهیافت ثابت بن‌قره را روشن می‌کنند. در این استدلالها وی دو قضیه از *اصول* اقلیدس را به‌کار می‌برد، که اینک آنها را بیان و ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۵. مقالهٔ دوم. *اگر خطی مانند* AE در B *تقسیم و در* W *به‌دو نصف شود آن‌گاه مستطیل* $AB \cdot BE$ *به‌اضافهٔ مربع واقع بر* BW *برابر است با مربع واقع بر* AW (شکل ۴ – ۳ (آ) و (ب)).

توجه کنید که در این قضیه، B می‌تواند در هر دو طرف نقطهٔ میانی W قرار گیرد. دو قسمت شکل ۴ – ۳ این دو حالت را نشان می‌دهد و طوری رسم شده‌اند که GAEM مستطیلی به‌اضلاع AE و $AG(=AB)$ است. مستطیل $AB \cdot BE$ که در قضیه سخن از آن در میان است با مستطیل هاشور خورده به‌ضلع $AB=BD$ مساوی است. قضیهٔ بالا با قطعه خطی که به‌طور داخلی تقسیم و به دو نصف شده است سروکار دارد. قضیهٔ آتی با قطعه خط امتداد یافته‌ای سروکار دارد که می‌توان به‌آن این گونه نگاه کرد که به‌طور خارجی تقسیم و به دو نصف شده است.

قضیهٔ ۶. مقالهٔ دوم. *اگر خط مفروضی مانند* BH *در* W *به دو نصف شود و در راستای خط مستقیم* BA *امتداد داده شود آن‌گاه مستطیل* $AH \cdot AB$ *به‌اضافهٔ مربع واقع بر* BW *برابر است با مربع واقع بر ضلع* AW (شکل ۴ – ۴).



شکل ۴-۴

برهان قضیهٔ ۵ مقالهٔ دوم. در حالتی که B بین W و E است، درستی قضیه با رسم قطر GB در مربع ABDG و خط WKL به‌موازات BD کاملاً آشکار می‌شود. بالاخره، خط FKH را به‌موازات AB رسم کنید. ABDG مربع است زیرا AG = AB، بنابراین WBHK هم مربع است. اینک شکل L ـ مانند WEMDHK را درنظر بگیرید. چنین شکلی را یونانیان عَلَم[۱] می‌نامیدند. مورد عَلَمِ WEMDHK که از مستطیل AB · BE به‌اضافهٔ مربع به‌ضلع BW تشکیل گردیده چیزی است که از برداشتن KHDL از مستطیل WEML باقی می‌ماند. همچنین بنابر قضیهٔ ۴۳ مقالهٔ اول *اصول* اقلیدس، KHDL = AWKF، درحالی‌که WEML = WAGL، زیرا AW = WE. بنابراین، عَلَمِ

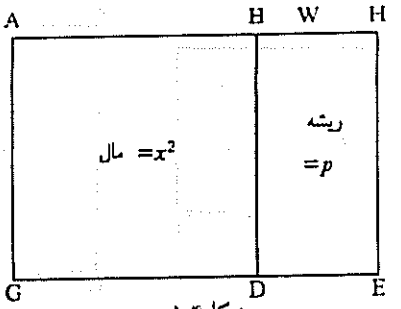
$$\text{WEMDHK} = \text{WEML} - \text{KHDL} = \text{WAGL} - \text{AWKF} = \text{FKLG}$$

و FKLG برابر است با مربع واقع بر AW، زیرا این یک مربع است و ضلعش FK = AW می‌باشد.

برهان حالت دیگر این قضیه شبیه به‌همین است و به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود.

برهان قضیهٔ ۶ مقالهٔ دوم. مربع ABDG را بر ضلع AB و مستطیل DBHL را بنا کنید. در این صورت GAHL با مستطیل AB · AH مساوی است زیرا AG = AB. خطی که از W به‌موازات BD رسم می‌شود DBHL را به‌دو مستطیل همنهشت [مساوی] تقسیم می‌کند، زیرا BW = WH. اگر WHLK روی AB قرار گیرد به‌طوری که WK بر AB منطبق شود در این صورت ملاحظه می‌کنیم که مستطیل اصلی با اضلاع AH، AB مساوی است با عَلَم EGKWBF؛ ولی، هرگاه مربع BF[۲] به‌این شکل اضافه شود، نتیجه مربع واقع بر GK است. حال برهان کامل است چون مربع واقع بر GK همان مربع واقع بر AW است، زیرا AW = GK.

۱ـ gnomon، یا عَلَم شکلی است که اگر به‌شکل هندسی اضافه کنیم شکلی مشابه با آن به‌دست می‌آید (اصطلاح از بیرونی است). ـم.



شکل۴-۵

برهان ثبات بن قره

ثابت بحث خود برای معتبر بودن روشهای مربوط به‌حل معادلات درجهٔ دوم را با بحث در حل آنچه که وی آن را اولین صورت اساسی می‌نامد، یعنی «مال و جذرها با عدد معادلند»، آغاز می‌کند. برای دنبال کردن بحث زیر خواننده باید بداند که اصطلاح «جذرها» که ثابت به‌کار می‌برد متناظر با «px» امروزی است و اینکه وی کلمات «عدد جذرها» را به‌معنی ضریب «p» به‌کار می‌برد. در شکل ۴ – ۵ فرض کنید مربع ABDG مال را نمایش دهد (بنابراین ضلعش AB یک جذر است)، و فرض کنید واحد طول چنان انتخاب شده باشد که BH نمایش عدد جذرها باشد. در این صورت مساحت DEHB معرف جملهٔ «جذرها» است و بنابراین GEHA مال و جذرها را نمایش می‌دهد. در این صورت، برطبق قضیهٔ ۶ مقالهٔ دوم اقلیدس GEHA به‌اضافهٔ BW^2 مساوی AW^2 است. ولی مال و جذرها معلوم است (زیرا برابر «عدد»ند)، و BW^2 نیز معلوم است، چون BW نصف عدد جذرهای مفروض است. بنابراین AW^2 و در نتیجه AW، معلوم است. ولی $x = AB = AW - BW$، و لذا x معلوم است.

بالاخره ثابت بن قره تناظر بین جواب هندسی داده شده و جواب جبری را نشان می‌دهد.

$$\text{نصف عدد جذرها} \leftrightarrow \frac{1}{2}BH = BW$$

$$\text{مربع مقدار بالا} \leftrightarrow \text{مربع واقع بر } BW$$

$$\text{اعداد} \leftrightarrow \text{مستطیل واقع بر } AB \cdot HA$$

$$\text{حاصل‌جمع دو مقدار قبلی} \leftrightarrow \text{مربع واقع بر } AW$$

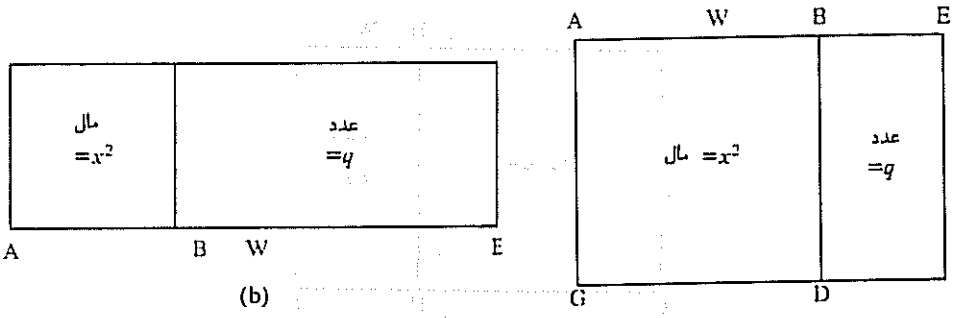
$$\text{ریشهٔ دوم حاصل‌جمع} \leftrightarrow AW$$

$$\text{تفاضل ریشهٔ دوم و نصف عدد جذرها} \leftrightarrow AB = AW - BW$$

وی $(\frac{p}{2})^2$ را به‌دو طرف اضافه می‌کند و

$$x^2 + px + (\frac{p}{2})^2 = q + (\frac{p}{2})^2$$

را به‌دست می‌آورد. با تعبیر هندسی که وی از همهٔ جملات به‌عنوان مساحتها به عمل می‌آورد، می‌تواند



شکل ۴-۶

قضیهٔ ۶ مقاله دوم اقلیدس را برای طرف اول به‌کار برده و

$$(x+\frac{p}{2})^2 = q+(\frac{p}{2})^2$$

را به‌دست آورد. بنابراین x به‌صورت زیر معین می‌شود:

$$x=\sqrt{q+(\frac{p}{2})^2}-\frac{p}{2}.$$

ثابت سپس درستی جواب را در مورد صورت اساسی دوم، یعنی «مال به‌اضافهٔ اعداد مساوی جذرهاست» (شکل ۴ – ۶ (آ) و (ب))، به‌صورت زیر ثابت می‌کند. مجدداً، مربع ABDG مال‌را نمایش می‌دهد و نقطهٔ E در امتداد AB چنان انتخاب می‌شود که، با مفروض بودن واحدی برای طول، طول خط AE مساوی با عدد جذرها باشد. (در واقع ثابت نشان می‌دهد که چنین نقطهٔ E باید بر امتداد AB واقع باشد.) اینک، AE را در W نصف کنید و مستطیلی با اضلاع GA و AE بسازید. توجه کنید که GA «جذر» است و AE عدد جذرهاست، بنابراین مستطیل مذکور معرف «جذرها»ست، که «حاصل‌جمع مال و اعداد» است، و مربع (BG) مال است. (برای نشان دادن چهار ضلعی از دو رأس متقابل استفاده می‌کنیم.) بنابراین وقتی مال راکم می‌کنیم مستطیل باقیمانده همان «اعداد» است. بر طبق قضیهٔ ۵ مقالهٔ دوم اقلیدس «اعداد» به‌اضافهٔ مربع واقع بر BW با مربع واقع بر AW مساوی است. ولی این مربع معلوم است، زیرا AW نصف عدد جذرهاست، و «اعداد» هم معلوم است، بنابراین جملهٔ باقیمانده، مربع واقع بر BW، معلوم است، و لذا خود BW نیز معلوم است. چون AW و WB هر دو معلومند، AB نیز (که «جذر» است) معلوم است ـ در نمودار اول به عنوان $AB = AW + WB$، و در نمودار دوم به‌عنوان $AW - WB$.

ثابت در جبر وارد جزئیات نمی‌شود، زیرا از حالت قبل ظاهراً احساس می‌کند که تناظر بین جبر و هندسه به‌اندازهٔ کافی روشن است.

بخش ۵. ابوکامل و علم جبر

مشابهتهای او با خوارزمی

نویسنده‌ای که در زمان فوت ثابت در ۹۰۱ میلادی [۲۸۰ هجری] فعّال بود، ابوکامل است، که‌تنها چیزی که می‌توان از او گفت این است که می‌دانیم لقب وی «حاسب مصری» است. اثر وی جبر شرحی است بر جبر خوارزمی و، تا اندازه‌ای به‌همین دلیل، و تا اندازه‌ای به‌دلیل ارزش خود کتاب، رواج کامل یافت. هم کرجی نویسندهٔ مسلمان در اواخر سدهٔ دهم میلادی [چهارم هجری] و هم نویسندهٔ لاتینی لئوناردو پیسا[۱]، مشهور به فیبوناتچی[۲]، در اواخر سدهٔ دوازدهم از مثالهای ابوکامل استفادهٔ زیادی کردند.

آن گونه که از یک شرح انتظار می‌رود مشابهتهای فراوانی بین اثر ابوکامل و اثر خوارزمی وجود دارد. به‌عنوان مثال، وی در نامگذاری کمیتهای اساسی اعداد، جذرها، و مال از خوارزمی پیروی می‌کند. مانند اثر خوارزمی، کتاب جبر سراسر لفظی است، و حتی اعداد هم با حروف نوشته می‌شوند. به‌علاوه رده‌بندی معادلات همان است، یعنی شش نوع معادله باهمان ترتیب ظاهر می‌شوند، و در مورد معادلاتی که متضمن هر سه جمله هستند همان مثالها ذکر می‌شوند. بالاخره، مانند خوارزمی، ابوکامل برخلاف حالت کلی ثابت بن قره برهانهای هندسی روشهایی عددی را در قالب مثالهای خاص مورد بحث قرار می‌دهد.

گامهایی فراتر از خوارزمی

با این حال، اثر ابوکامل در ارائهٔ احکام کلی قواعدی که خوارزمی آنها را به‌وسیلهٔ مثال بیان می‌کند از اثر خوارزمی فراتر می‌رود. به‌علاوه، وی برهانهای قواعدی از نوع زیر برای عملیات روی کمیتهای جبری را فراهم می‌کند:

$$(۱)\quad (a\pm px)(b\pm qx) = ab\pm bpx\pm aqx + pqx^2$$

$$(a\pm px)(b\mp qx) = ab\pm bpx\mp aqx - pqx^2$$

$$(۲)\quad \sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \text{ و } \sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$$

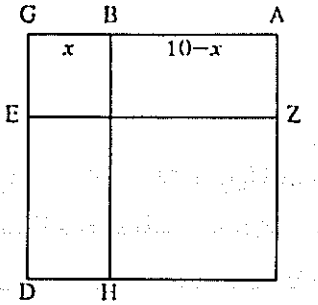
$$(۳)\quad \sqrt{a}\pm\sqrt{b} = \sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}}$$

بدیهی است که اتحادهای (۱) اساسی هستند، درحالی که می‌توانیم با استفاده از (۲) و (۳) همراه با هم ترکیبهای حسابی جذرها را به‌صورت جذر بنویسیم. علاوه بر این، (۲) تا اندازه‌ای دارای فایدهٔ عملی است زیرا به ما امکان می‌دهد که مثلاً در محاسبهٔ $\sqrt{۵}\cdot\sqrt{۱۳}$ فقط اعداد صحیح را در هم ضرب کنیم و سپس جذر بگیریم، یعنی $\sqrt{۶۵} = \sqrt{۱۳\cdot ۵}$، که اینک به‌آسانی دیده می‌شود که قدری از ۸ بیشتر است، و این چیزی است که از $\sqrt{۵}\cdot\sqrt{۱۳}$ چندان واضح نیست.

در مورد (۱)، ابوکامل این قاعده را به‌صورت ذیل بیان می‌کند «وقتی جذرها به‌اعداد اضافه یا از

۱ـ Leonardo of Pisa

۲ـ Fibonacci



شکل ۴-۷

آنها کم می‌شوند، صرف‌نظر از ترتیب، (یعنی px + a یا a + px+)، آن‌گاه جزء چهارم اضافه می‌شود، که در آن «جزء چهارم»، حاصل‌ضرب جذرها، یکی در دیگری، است.» در اینجا وی فقط از «جزء چهارم» صحبت می‌کند، یعنی از (qx+) · (px+) یا (−qx) · (−px) زیرا فرض را بر این می‌گذارد که خواننده علامتهای سه جملهٔ اول این حاصل‌ضرب را می‌داند. اندکی بعد قواعد علامتها را برای ضرب، یعنی (−a)(+b) = −(ab)، (−a)(−b) = +(ab)، و (+a)(+b) = +(ab)، را به‌این صورت جمعبندی می‌کند «وقتی که دو جمله منها باشند، حاصل‌ضرب بعلاوه می‌شود؛ منها ضرب در بعلاوه منهاست؛ بعلاوه ضرب در بعلاوه بعلاوه است.»

ابوکامل قواعدی نظیر $ax \cdot bx = ab \cdot x^2$ و $a \cdot (bx) = (ab) \cdot x$ را (که در آن a و b در طی برهان همواره اعداد مشخصی هستند) به‌دقت ثابت می‌کند، و سپس درستی حالتهای خاص (۱) را نشان می‌دهد، مثلاً

$$(10 - x) \cdot (10 - x) = 100 + x^2 - 20x$$

گرچه ابوکامل بر اساس قانون توزیع‌پذیری و قواعد علامتها برهانی جبری ارائه می‌دهد، برهان هندسی زیر را نیز می‌آورد.

برهان (شکل ۴ − ۷) فرض کنید خط GA معرف عدد ۱۰ باشد و GB معرف «شیء»، x، اینک مربع (AD) را مطابق نمودار کامل کنید. در این صورت $AB = ED = 10 - x$، بنابراین مربع (ZH) برابر است با $(10 - x)^2$. همچنین $(GZ) = (GH) = 10x$، بنابراین $(EH) = (GH) - (EB) = 10x - x^2$. لذا عَلَم (EH) + (GZ) مساوی است با $20x - x^2$. چون مربع بزرگتر ۱۰۰ است، نتیجه می‌شود که

$$(100 - x)^2 = (ZH) = 100 - (20x - x^2) = 100 + x^2 - 20x.$$

ابوکامل هیچ توضیحی در مورد تساوی اخیر نمی‌دهد، بنابراین احتمالاً آن را یا از قاعدهٔ علامتها یا از شکل آشکار می‌پندارد.

این نمونه‌ها از ثابت بن قره و ابوکامل برای تشریح استدلالهایی که جبردانان دنیای اسلام برای قواعد جبری به وسیلهٔ قضایای هندسی ارائه می‌دادند، کافی است و ما از ذکر برهانهای (۲) و (۳) صرفنظر

می‌کنیم .

مسئله‌ای از ابوکامل

اثر ابوکامل مشتمل بر مسائل بسیار متنوعی است ، جمعاً ۶۹ مسئله ، که تقریباً بالغ بر ۳۰ مسئله بیش از ۴۰ مسئله‌ای است که خوارزمی شرح داده است . یکی از جالبترین این مسائل ، مسئلهٔ ۶۱ است ، که ابوکامل آن را به‌صورت زیر بیان می‌کند :

> شخصی می‌گوید که ۱۰ به‌سه جزء تقسیم شده است . اگر جزء کوچکتر در خود ضرب شود و با حاصل ضرب جزء متوسط در خود جمع شود نتیجه حاصل ضرب جزء بزرگتر در خودش می‌شود ، و وقتی جزء کوچکتر در جزء بزرگتر ضرب شود نتیجه برابر می‌شود با حاصل ضرب جزء متوسط در خود .

بنابراین ابوکامل راجع به‌مجهولات x ، y ، و z (که جملگی مثبت فرض می‌شوند) بحث می‌کند که در سه معادلهٔ ذیل صدق می‌کنند

$$۱۰ = x + y + z \quad ، \quad z^۲ = x^۲ + y^۲ \quad ، \quad xz = y^۲$$

وی ابتدا x را ۱ می‌گیرد و شرایط چنین می‌شوند :

$$۱۰ = ۱ + y + z \quad ، \quad z^۲ = ۱ + y^۲ \quad ، \quad z = y^۲$$

از دو شرط اخیر نتیجه می‌شود ، $(y^۲)^۲ = ۱ + y^۲$ ، و این معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب $y^۲$ را حل کرده و $z = y^۲ = \frac{۱}{۲} + \sqrt{۱\frac{۱}{۴}}$ ، و بنابراین $y = \sqrt{\frac{۱}{۲} + \sqrt{۱\frac{۱}{۴}}}$ را به‌دست می‌آورد .
از آنجا

$$۱ + y + z = \frac{۳}{۲} + \sqrt{۱\frac{۱}{۴}} + \sqrt{\frac{۱}{۲} + \sqrt{۱\frac{۱}{۴}}}.$$

هرگاه این کمیت را a بنامیم ، باید داشته باشیم $a = ۱۰$ ، ولی بدیهی است که برابر با ۱۰ نیست ؛ اما ، $a \cdot ۱۰/a = ۱۰$ ، بنابراین اگر قرار دهیم $b = ۱۰/a$ ، آنگاه $a \cdot b = ۱۰$. این را می‌توان به‌صورت $(۱ + y + z) \cdot b = ۱۰$ ، یعنی $b + (yb) + (zb) = ۱۰$ نوشت .

بنابراین b ، yb ، و zb جوابهای مسئله‌اند ، و روشی که ابوکامل در اینجا به‌کار می‌برد به «قاعدهٔ امتحان و تصحیح» مشهور است . این تدبیر جبری ، گرچه به‌قدمت کرهٔ زمین نیست ، ولی دست کم به‌اندازهٔ اهرام مصری قدمت دارد ، زیرا در متون قدیمی مصری یافت شده است . در ساده‌ترین صورتش ، شخص $5x = ۲۴$ را چنین حل می‌کرده «وقتی که $x = ۱$ ، $5x = 5$. کدام عدد را باید در ۵ ضرب کنم تا ۲۴ شود ؟ جواب $۴\frac{۴}{۵} = \frac{۲۴}{۵}$ است . بنابراین مقدار واقعی x عبارت است از $۱(۴\frac{۴}{۵})$.» البته در مسئلهٔ ابوکامل تعداد متغیرها و شرطها بیشتر است ، ولی در هر شرط (معادله) همهٔ جمله‌ها درجهٔ واحدی (یک یا دو) دارند و

بنابراین قاعدهٔ امتحان و تصحیح برقرار می‌ماند.

ما از روش ابوکامل برای محاسبهٔ مقدار b پیروی نخواهیم کرد، و تنها متذکر می‌شویم که این روش نوعی بازی توأم با خوش قریحگی با قواعد جبری است همراه با استفادهٔ بدون ذکر از اتحاد

$$\sqrt{11\frac{1}{4}\cdot x^2\cdot x^2}-\sqrt{1\frac{1}{4}\cdot x^2\cdot x^2}=\sqrt{5x^2x^2}.$$

در پایان وی b را به‌عنوان ریشه‌ای از معادلهٔ

$$10x=x^2+75-\sqrt{3125}$$

به‌دست می‌آورد. این معادله یکی از شش صورت استانده است، و او با حل آن b را چنین پیدا می‌کند:

$$b=5-\sqrt{\sqrt{3125}-50}.$$

با روشی مشابه، وی به‌عبارت

$$2\frac{1}{2}+\sqrt{31\frac{1}{4}}-\sqrt{\sqrt{78\frac{1}{4}}-12\frac{1}{2}}$$

برای z، یعنی بزرگترین ریشه، می‌رسد و از این دو، با توجه به $x+y+z=10$، می‌تواند عبارتی را برای y بنویسد.

حل این مسئله، که مراحل اساسی آن به‌کاربستن قاعدهٔ امتحان و تصحیح و اتحاد مربوط به $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ است، مبین آن است که مؤلفان در سدهٔ دهم میلادی [چهارم هجری] توانایی گویا نمودن مخرجها را در عباراتی به‌صورت $a/(c+\sqrt{d}+\sqrt{e+\sqrt{f}})$ داشتند، و این متضمن سروکار داشتن با توانهای مجهول تا توان هشتم و حل معادلات درجهٔ دوم با ضرایب گنگ بوده است.

بخش ۶. کرجی و حسابیدن جبر

مقدمه

اثر ابوکامل پیدایش حسابی برای عبارتهایی به‌صورت $a+b\sqrt{q}$ را، که در آن a، b و q اعدادی گویا هستند و q مثبت، نشان می‌دهد. گرچه ثابت بن قره و ابوکامل هندسه را در جبر به‌کار می‌برند، در بحث ابوکامل از اعداد $a+b\sqrt{q}$ تمایلی از به کاربردن حساب در موضوعی که اقلیدس مدتها پیش از او، به‌طور هندسی به آن پرداخته بود مشهود است. ما همچنین مثالهایی با درجهٔ پیچیدگی روزافزون را ملاحظه کرده‌ایم که جبردانان را وادار کرده است تا عبارتهایی پیچیده‌تر از عبارتهایی که تنها متضمن «شیءها» یا «مربعها» هستند درنظر بگیرند، و این تمایلات هر دو به کتابی در جبر موسوم به *الفخری* تألیف ابوبکر کرجی راه یافتند.

کرجی یکی از دانشمندان بسیار برجستهٔ مسلمانی است که می‌خواهیم دربارهٔ زندگی‌اش بیش از آنچه که معلوم است چیز بدانیم. به‌هر جهت معلوم شده است که در حوالی ۱۰۰۰ میلادی [۳۸۰ هجری]

در بغداد فعالیت داشته و در دههٔ اول این سده کتابی را در جبر به‌وزیری به‌نام فخرالملک اهدا کرده است. اندکی بعد به«سرزمین جبل» [طبرستان] عزیمت کرده است. وی باید مردی با علایق فراوان بوده باشد، زیرا در میان آثارش نه تنها رسایلی در حساب، جبر، معادلات سیاله [آنالیز نامعین]، و نجوم دیده می‌شود، بلکه رسالاتی نیز در مساحی و کشف آبهای زیرزمینی[۱] مشاهده می‌شود.

اگرچه نویسندگانی چون دیوفانتوس و ابوالوفا امکان استفاده از توانهای بالای دلخواه مجهول را خاطر نشان کرده‌اند، به‌نظر می‌رسد که کرجی نخستین کسی بوده باشد که جبرِ عبارتهای مشتمل بر این توانها را بسط داده است. از دیدگاه او کمیتهای مجهول، اعم از اعداد مطلق و مقدارهای هندسی، می‌توانند یک «ریشه»، «ضلع» یا «شیٔ» (هر دو متناظر با «x» امروزی) باشند یا اینکه به‌عنوان مال (x^2)، کعب (x^3)، مال مال (x^4)، مال کعب (x^5)، و غیره محسوب شوند، که در آن هر عضو حاصل‌ضرب «شیء» در عضو قبلی است. کرجی این انواع مختلف از کمیتها را «مراتب» می‌نامد (مراتب اصطلاحی است که ضمناً برای مواضع توانهای مختلف ۱۰ در حساب اعشاری به‌کار می‌رفت)، و مشاهده می‌کند که ۱ عددی است که در همهٔ مراتب مشترک است (زیرا برابر است با همهٔ توانهای خودش). به‌علاوه با هر مرتبه (x^n)، جزء متناظر ($\frac{1}{x^n}$) نظیر می‌شود که دارای این خصوصیت است که هر مرتبه ضرب در جزء خود برابر با ۱ است. بر این اساس کرجی طرح خود را در پرداختن به‌عبارتهایی مانند «مال مال و چهارکعب منهای شش واحد» ($x^4 + 4x^3 - 6$) و «پنج کعب‌کعب منهای دو جذر و سه واحد» ($5x^6 - [2x^3 + 3]$) به‌وسیلهٔ قواعدی که الگوی آنها قواعد معمولی حساب برای جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، و استخراج ریشهٔ دوم [= جذر] است، بسط می‌دهد.

رشدی راشد از این مدلبندی جبر چند جمله‌ایها بر مبنای حساب ارزش موضعی، به‌عنوان «حسابیدن جبر» یاد می‌کند. کرجی یکی از پیشاهنگان این روند بود و این امر که موفقیت او در حسابیدن جبر فقط اندک بود، نه به‌علت فقدان قوهٔ ابتکار، بلکه به علت نبودن راهی برای داخل کردن اعداد منفی در نظریه است. مثلاً، گرچه کرجی با قواعدی مانند $a - (-b) = a + b$، که در آن a و b مثبتند، آشنا بود، ظاهراً قاعدهٔ $-(a - b) = -a - (-b)$ را کشف نکرده بود. این امر مانع از آن شد که او روش خود را برای تقسیم دو کثیرالجمله به‌منظور در برگرفتن همه حالتها بسط دهد، زیرا روش وی، که بعداً به‌شرح آن خواهیم پرداخت، عموماً مستلزم تفریق یک مقدار منفی از مقدار منفی دیگری بود. به‌دلیل مشابه، این امر همین طور وی را از کشف روشی برای استخراج ریشه‌های دوم [جذر] چند جمله‌ایها بازداشت. شاید دانشجویانی که با قانون علامتها دسته و پنجه نرم کرده‌اند آرامش پیدا کنند، وقتی بدانند که در دورانی از گذشته، کشف این قوانین به‌بهای نبوغ بهترین ریاضیدانان تمام شده است و نیز کشف بسیاری از ریاضیات مقدماتی ما (ریاضیات مقدم برحسابان) مستلزم تلاش قابل ملاحظه‌ای بوده و در آغاز پیدایش اشتباهاتی به‌همراه داشته‌اند.

۱ـ منظور کتاب انباط المیاه الخفیه [= استخراج آبهای پنهانی] است. این کتاب در سال ۱۳۴۵ شمسی به‌توسط زنده‌یاد حسین خدیوجم به‌فارسی ترجمه شده است (انتشارات بنیاد فرهنگ ایران). ـم.

با این حال، قواعدی راکه به‌کمیتهای علامتدار می‌پردازد در نوشته‌های پزشکی موسوم به سموئل بن یحیی بن یهودای مغربی پیدا می‌کنیم که احتمالاً ۷۰ سال پس از فوت کرجی در بغداد متولد شده است و اثرش شرحی بر اثر کرجی است. در اثرش *الباهر فی‌العلم الحساب* (*کتاب درخشان در محاسبه*)، که در نوزده‌سالگی آن را نوشت بخشهای پرزحمت‌تر قاعدهٔ علامتها را به‌صورت زیر بیان می‌کند:

... هرگاه عددی ناقص (منفی) را از یک عدد ناقص بزرگتر از آن (یعنی، نشاندهندهٔ نقصانی بزرگتر) کم کنیم تفاضل ناقص باقی می‌ماند (مثلاً $-(۲-۵) = -(-۲) - ۵$)، ولی در حالت عکس تفاضل آنها زاید باقی می‌ماند ($+(۲-۵) = (-۵) - (-۲)$). هرگاه عددی زاید [مثبت] را از مرتبه‌ای خالی (مرتبه‌ای که یک صفر در آن موجود است) کم کنیم، همان عدد، منتها با نقصان، باقی می‌ماند؛ ولی در صورتی که عددی ناقص را از مرتبه‌ای خالی کم کنیم، همان عدد با زیادتی باقی می‌ماند.

بنابراین، سموئل اعداد را یا بیانگر یک زیادتی («مثبت» امروزی) یا یک نقصان («منفی» امروزی) می‌پنداشت، به‌طوری که، مثلاً، عددی که بیانگر یک نقصان ۵ است از عددی که بیانگر یک نقصان ۲ است بزرگتر خواهد بود. قواعد سموئل برای تفریق توانها، به‌زبان نمادی، می‌گوید که $-(ax^n)$ $-(-bx^n)$ مساوی است با

$$-(ax^n - bx^n) \quad \text{اگر} \quad a > b$$

و مساوی است با

$$+(bx^n - ax^n) \quad \text{اگر} \quad a < b$$

با استفاده از این قواعد سموئل می‌توانست روشهای موجود امروزی را در مورد جمع و تفریق ترکیب توانها با جمع و تفریق جمله‌های همقوه به‌کار برد و چنین هم کرد.

سموئل در یک خانوادهٔ یهودی متولد شد، و شرایط حاکم بر بغداد در آن روزگار از اینجا پیداست که وی نتوانست کسی راکه توانایی تدریس ریاضیات را سوای چند مقالهٔ اول *اصول* اقلیدس داشته باشد، پیدا کند. در نتیجه مطالعهٔ این اثر را پیش خود کامل و سپس آثار ابوکامل و کرجی را مطالعه کرد. در شرح احوال خود از خوابی سخن می‌گوید که در سال ۱۱۶۳ میلادی [۵۴۲ هجری] دید و سبب اسلام آوردن او شد. زندگی او به‌صورت پزشک در حال سفری سپری شد، پزشکی که از شاهزادگانی در زمرهٔ بیمارانش یاد کرده است. او در حوالی ۱۱۸۰ میلادی [۵۵۹ هجری] در مراغه درگذشت.

از هشتادوپنج اثر ثبت شدهٔ سموئل، که ریاضیات و نجوم، پزشکی، الاهیّات را در بر می‌گیرد، تنها چندتایی باقی مانده است، و، از بین آثار ریاضی او، تنها در *الباهر*، که قبلاً ذکرش به‌میان آمد، بحث خواهیم کرد. ما در شرح خود، به دو بخش از نخستین قسمت دربارهٔ جبر، یعنی بخشهایی که به‌قانون نماها و تقسیم عبارتهای مرکب از مراتب مختلف مربوط می‌شوند، می‌پردازیم.

جدول ۴-۱

ذ	د	خ	ح	ج	ث	ت	پ	ا	ء	ا	پ	ت	ث	ج	ح	خ	د	ذ
ک‌ک‌ک	م‌ک‌ک	م‌م‌ک	کک	م‌ک	م‌م	ج	م	ج‌ش	واحد	ش	م	ک	م‌م	ج	کک	م‌م‌ک	م‌ک‌ک	ج‌ک‌ک‌ک
۵۱۲	۲۵۶	۱۲۸	۶۴	۳۲	۱۶	۸	۴	۲	۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲
۱۹,۶۸۳	۶,۵۶۱	۲,۱۸۷	۷۲۹	۲۴۳	۸۱	۲۷	۹	۳	۱	۱/۳	۱/۹	۱/۲۷	۱/۸۱	۱/۲۴۳	۱/۷۲۹	۱/۲,۱۸۷	۱/۶,۵۶۱	۱/۱۹,۶۸۳

سموئل و قانون نماها

مبنای قواعد ضرب سموئل جدول بالا است. در ارائهٔ این جدول و موارد دیگر از اثر سموئل، به‌عنوان حدواسط بین نمادگذاری جدید و قرون وسطایی، اختصاراتی نظیر «م ک ک» را برای «مال کعب کعب» (x^8) و «ج ک ک» برای «جزء کعب کعب» ($\frac{1}{x^6}$) به‌کار می‌بریم. به‌این ترتیب خواننده می‌تواند درک درست‌تری از ریاضیات سدهٔ دوازدهم میلادی [ششم هجری] جهان اسلام داشته باشد.

سموئل در آغاز جدولی را که هدف آن آموختن ضرب و تقسیم عبارتهای ساده‌ای مانند ج م ک و م م ک است تنظیم می‌کند. سر ستون هر یک از ستونهای این جدول از شمارهای الفبایی معمولی عربی تشکیل شده است، بنابراین (الف) به‌جای ۱، (ب) به‌جای ۲، و غیره به‌کار می‌رود (جدول ۴ – ۱) ستون چهارم واقع در سمت چپ ستونی که سر ستونش «°» است، یعنی ستونی که سر ستون آن ث است، به‌این معنی است: «وقتی که «شیء» ۲ (به‌ترتیب ۳) است آن‌گاه «جزء مال مال» $(\frac{1}{4})(\frac{1}{4})$ (به ترتیب $(\frac{1}{9})(\frac{1}{9})$) است.»

اهمیت این جدول در این است که سموئل با به کار بردن آن یک معادل عملیاتی برای قانون نماها به دست می‌آورد: به‌ازای هر دو عدد صحیح m و n، $X^mX^n = X^{(m+n)}$. وی این قاعده را به طریق زیر بیان می‌کند، که در آن «فاصله» به معنی «تعداد خانه‌ها در جدول» است:

> فاصلهٔ مرتبهٔ حاصل‌ضرب دو عامل از مرتبهٔ یکی از این دو عامل مساوی است با فاصلهٔ مرتبهٔ عامل دیگر از واحد. هرگاه این عاملها در دو جهت مختلف باشند (فاصله) را از مرتبهٔ اولین عامل به طرف واحد می‌شماریم؛ ولی، هرگاه این عاملها در یک جهت باشند، شمارش را با دور شدن از واحد انجام می‌دهیم.

سموئل مثالهای متعددی از این قاعده را مورد بحث قرار می‌دهد و در آنها از شمارهای بالای مرتبه‌ها به خوبی استفاده می‌کند. مثلاً در مثال ج ک ضرب در ج م م می‌گوید که چون م م با شروع از واحد از مرتبهٔ پنجم است، از خانهٔ ج ک شروع کرده و با دور شدن از واحد پنج مرتبه شمرده و به [خانهٔ] ج م م ک می‌رسیم؛ اما پس از آن می‌گوید:

> روبه‌روی (بالای) مرتبه جزء کعب ۳ و روبه‌روی [بالای] جزء مال مال ۴ است. با جمع کردن این دو ۷ حاصل می‌شود و روبه‌روی (زیر) آن مرتبه جزء مال مال کعب است.

پس، این بیان یک جبردان سدهٔ دوازدهم میلادی [ششم هجری] است از آنچه که ما امروزه به صورت $x^{-3}x^{-4} = x^{-7}$ می‌نویسیم. سموئل دوباره می‌نویسد (و ما در این نوشته، شمارها را به جای اعداد

حروفی آن می‌گذاریم) :

برای یافتن حاصل ضرب ۳ جزء مال و ۷ کعب ، ۳ را در ۷ ضرب می‌کنیم ، حاصل ۲۱ می‌شود . «کعب» در مرتبهٔ چهارم از واحد قرار دارد ، بنابراین چهار مرتبه از مرتبهٔ «جزء مال» را به طرف واحد می‌شماریم ، لذا جواب ... ۲۱ شیء است ... اگر بخواهیم ، تفاضل اعداد روبه‌روی [بالای] مرتبه‌های دو عامل ، یعنی ۲ و ۳ ، را در نظر گرفته ، و ۱ را به دست می‌آوریم ، و روبه‌روی [زیر] ۱ ، در جهت عاملی که عدد بزرگتر در روبه‌روی آن است ، مرتبهٔ اشیاء را پیدا می‌کنیم .

این قاعده اخیر را می‌توانم به‌ازای nهای بزرگتر از m به صورت $x^n x^{-m} = x^{n-m}$ بنویسیم .

توجیه سموئل برای این قاعدهٔ کلی خود این است که هرگاه $c = a \cdot b$ آنگاه $c : a = b : 1$ ؛ بنابراین نسبت حاصل ضرب c به a مثل نسبت b است به ۱ . به‌ویژه هرگاه b ، n مرتبه در راست یا چپ ۱ باشد آنگاه c باید n مرتبه در راست یا چپ مرتبهٔ a باشد . این مثال خوبی است از شرح و بسط یک رابطهٔ به دقت تعریف شدهٔ ریاضی و استفاده از آن ، با تعبیری که شخص آن را درست می‌داند ، تا پیامدهای آن رابطه را استنتاج نماید . در دست کسی که خود را مسلط به همهٔ زوایای موضوعی می‌داند ، چنین استدلال رهگشایانه‌ای روشی پرثمر برای اکتشاف است ، و سموئل از این قاعده مستثنا نیست .

با داشتن قواعد فوق برای ضرب تک تک مرتبه‌ها ، سموئل در توضیح چگونگی ضرب دو عبارت ، که هر یک متشکل از مرتبه‌های مختلفند ، مشکلی ندارد و صرفاً هر جملهٔ یکی از دو عبارت را در همهٔ جملات دیگری ضرب و نتایج را جمع می‌کند .

همین‌طور برای تقسیم ، متذکر می‌شود که ، «تقسیم یک عبارت مرکب بر یک تک مرتبه برای کسی که تقسیم تک مرتبه بر تک مرتبه را می‌داند آسان است ، و تقسیم تک مرتبه [بر تک مرتبه] برای کسی که ضرب تک مرتبه‌ها را می‌داند آسان است .» (البته ، اولی به موجب $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ ، و دومی به موجب اینکه $\frac{a}{c} = d$ به معنی $a = d \cdot c$ است) . با این حال می‌گوید که سایر حالتها دشوارترند ، و هیچ‌کس تا عصر او از عهدهٔ حل آنها برنیامده است ، ولی او راه حلی یافته است ، و مثال زیر را برای روشن نمودن آن ارائه می‌دهد .

سموئل و تقسیم چند جمله‌ایها

مثال اول

او مسئلهٔ تقسیم : ۲۰ ک‌ک +۲ م‌ک +۵۸ م‌م +۷۵ ک +۱۲۵ م +۱۹۶ ش +۹۴ واحد +۴۰ ج‌ش +۵۰ ج‌م +۹۰ ج‌ک +۲۰ ج‌م‌م را بر ۲ ک +۵ ش +۵ واحد +۱۰ ج‌ش مطرح می‌کند . با نمادهای جدید سؤال او محاسبه عبارت زیر است :

$$\frac{20x^6 + 2x^5 + 58x^4 + 75x^3 + 125x^2 + 196x + 94 + 40x^{-1} + 50x^{-2} + 90x^{-3} + 20x^{-4}}{2x^3 + 5x + 5 + 10x^{-1}}$$

می‌گوید اول «هر دو جمله را در ترتیب طبیعی قرار می‌دهیم ، و در هر مرتبهٔ خالی یک صفر می‌گذاریم .»

جدول ۴-۲

چ‌م‌م	چ‌ک	چ‌م	چ‌ش	واحد	ش	م	ک	م‌م	م‌ک	ک‌ک
	۲	۸	۰	۱۰	۴	۱	۱۰			
۲۰	۹۰	۵۰	۱۴۰ ۱۰	۹۴ ۰	۹۶ ۰	۱۲۵ ۰	۷۵ ۵	۵۸ ۵	۲ ۰	۲۰ ۲
۲۰	۹۰	۵۰	۱۴۰	۹۴	۹۶ ۱۰	۲۵ ۵	۲۵ ۵	۸ ۰	۲ ۲	
۲۰	۹۰	۵۰	۱۴۰	۹۴ ۱۰	۸۶ ۵	۲۰ ۵	۲۰ ۰	۸ ۲		
۲۰	۹۰	۵۰	۱۴۰ ۱۰	۵۴ ۵	۶۶ ۵	۰ ۰	۲۰ ۲			
۲۰	۹۰ ۱۰	۵۰ ۵	۴۰ ۵	۴ ۰	۱۶ ۲					
۲۰ ۱۰	۱۰ ۵	۱۰ ۵	۰ ۰	۴ ۲						

(پیداست که روش سموئل برای تخته تراب، که پاک کردن ساده، ولی محدودیت جا مطرح است، وضع شد، و این روش با رشته‌ای از جدولها به پیش می‌رود. اما این روش به سهولت برای عمل در روی کاغذ، که در آن مسئلهٔ پاک کردن دشوار و اما فضا فراوان است، قابل وفق است، و در صورتی که جدولهای او را در یک جدول ادغام کنیم چیزی از دست نخواهیم داد (جدول ۴ – ۲.)

سطر بالا فهرست اسامی مرتبه‌ها در ترتیب طبیعی آنها از چپ به راست و سطر پایین سطر جواب است، که در ابتدا خالی است و ضمن عمل پر می‌شود. باقی جدول به نوارهایی افقی، که هر یک شامل ۲ سطرند، افراز می‌شود، و هر نوار به انضمام دو سطر بالایی، یکی از جدولهای سموئل را تشکیل می‌دهند. بنابراین می‌توان از جدولهای اول، دوم، غیره صحبت کرد، و خواننده منظور ما را درک خواهد کرد.

در جدول اول ضرایب مقسومها، هر یک زیر نام مرتبهٔ خود، واقعند، و در زیر آنها، با شروع از اولین ستون سمت چپ ضرایب مقسوم علیه قرار دارد. توجه کنید در حالی که اسامی واقع در بالای جملات مقسوم با اسامی مرتبه‌های نظیر متناظرند، در مورد مقسوم‌علیه چنین نیست، بنابراین باید به خاطر آورد که در این حالت مقسوم‌علیه، با کعبها شروع می‌شود. اینک سموئل می‌گوید

بزرگترین مرتبهٔ مقسوم (۲۰ ک‌ک) را به بزرگترین مرتبهٔ مقسوم‌علیه (۲ ک) تقسیم می‌کنیم، حاصل یعنی ۱۰ کعب را در مرتبهٔ مقابل ۷۵ (مرتبهٔ کعبها) قرار می‌دهیم. سپس آن را (یعنی ۱۰ ک را) در مقسوم‌علیه ضرب و نتیجه حاصل از ضرب آن در هر مرتبه (مقسوم‌علیه) را از آنچه در بالای آن واقع است کم می‌کنیم.

یعنی سموئل ۲۰ ک‌ک را بر ۲ ک تقسیم کرده و ۱۰ ک را به دست می‌آورد و سپس حاصل ضرب

۱۰ ک در مقسوم‌علیه را از مقسوم کم می‌کند. اینک، پس از این تفریق، مقسوم قدیمی با باقیمانده تعویض می‌شود و سموئل می‌گوید، «مقسوم‌علیه را یک مرتبه به راست به شیوهٔ حساب هندسی ثبت می‌کنیم، و جدول دوم را به دست می‌آوریم».

خواننده بی‌تردید با این تقسیم، از تقسیم دو عدد صحیح به صورتی که کوشیار بن لبان آن را شرح داده و دنبالهٔ اعمال اصلی در آن به صورت زیر است، آشنایی دارد: اولین جمله را بر اولین جمله تقسیم کن، ضرب کن، تفریق کن، و به راست منتقل کن، ولی این بار این روش برای تقسیم عبارتهای جبری اعمال می‌شود.

همان رشته اعمال اینک تکرار می‌شود. در جدول ۴ – ۲ اولین جملهٔ مقسوم جدید یعنی ۲ را بر ۲ی مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم، و خارج قسمت، یعنی ۱، را در ستون واقع در سمت راست ۱۰، در سطر جواب، قرار می‌دهیم. اینک می‌توانیم مرتبهٔ ۲ مقسوم‌علیه را فراموش کنیم، زیرا جدول ما را در جریان کار نگه می‌دارد: سپس «۱ برابر مقسوم علیه» از مقسوم کم می‌شود، و مقسوم‌علیه دوباره یک مرحله به راست منتقل شده و جدول سوم به دست می‌آید.

سه بار تکرار مجدد این روش به جدول نهایی منجر می‌شود، که در آن آشکارا سطر ماقبل آخر دقیقاً [بدون باقیمانده] بر سطر آخر تقسیم و خارج‌قسمت ۲ است، و بنابراین سموئل خارج‌قسمت

$$۲۰x^۶ + ۲x^۵ + ۵۸x^۴ + ۷۵x^۳ + ۱۲۵x^۲ + ۱۹۶x + ۹۴ + ۴۰x^{-۱} + ۵۰x^{-۲}$$
$$+۹۰x^{-۳} + ۲۰x^{-۴}$$

را بر

$$۲x^۶ + ۵x^۴ + ۵x + ۱۰x^{-۱}$$

به‌صورت

$$۱۰x^۳ + x^۲ + ۴x + ۱۰ + ۸x^{-۲} + ۲x^{-۳}$$

به دست می‌آورد.

در روش تقسیم امروزی هر بار که ضرایب نوشته می‌شوند نشانه‌هایی (x، $x^۲$، و غیره) به آنها ملحق می‌شوند تا معلوم شود این ضرایب نمایندهٔ چه مراتبی هستند؛ ولی، در روش سموئل ستونهای یک آرایه یک بار نشانه‌گذاری شده و سپس ضرایب در ستونهای نشانه‌گذاری شده مرتب می‌شوند.

مثال دوم

او پس از این مثال تقسیم، مثال دیگری می‌آورد که در آن عبارتهایی شامل ضرایب منفی را تقسیم می‌کند، و از قواعد خود برای کمیتهای علامتدار استفادهٔ به جایی به عمل می‌آورد که تفریقهایی چون

۲۰ = (۴۰−) − ۲۰− که کرجی را دچار مشکل کرده بود، در زمرهٔ آنها قرار دارد.

مثال آخر در زیر فراست سموئل را نشان می‌دهد. مسئله عبارت از تقسیم ۲۰ م +۳۰ ش بر ۶ م +۱۲ واحد است، وگرچه ما دوباره همهٔ جدولهای او را در یک جدول ادغام می‌کنیم، به تکرار توضیح روش او مبادرت نخواهیم کرد (جدول ۴ − ۳).

سموئل نتیجهٔ نهایی، یعنی

$$۳\frac{۱}{۳} + ۵.\frac{۱}{x} - ۶\frac{۲}{۳}\cdot\frac{۱}{x^۲} - ۱۰\cdot\frac{۱}{x^۳} + ۱۳\frac{۱}{۱۳}\cdot\frac{۱}{x^۴} + ۲۰\cdot\frac{۱}{x^۵} - ۲۶\frac{۲}{۳}\cdot\frac{۱}{x^۶} - ۴۰\cdot\frac{۱}{x^۷}$$

را «جواب تقریبی» می‌نامد، و عمل تقسیم را با نوشتن حاصل‌ضرب این عبارت در مقسوم‌علیه و کم کردن حاصل‌ضرب از مقسوم امتحان می‌کند تا درستی این مطلب را تحقیق کند که تفاضل آنها عبارت است از باقیمانده $۳۲۰x^{-۶} + ۴۸۰x^{-۷}$.

در این مرحله، سموئل متوجه قاعده‌ای می‌شود که در تعیین ضرایب خارج قسمت حکمفرماست؛ زیرا اینک بدون محاسبات اضافی ضرایب همهٔ توانهای بعدی x را تا توان $x^{-۲۸}$ می‌نویسد، که درستی آن را به صورت ۶۱۳½، ۵۴ ارائه می‌دهد (که در آن اجزای کسری اعداد با استفاده از حروف نوشته می‌شوند). قاعده مزبور، در معنی این است که هرگاه n مین ضریب a_{-n} باشد، آنگاه $a_{-n} = -\frac{۱}{۲}a_{-n-۲}$.

با این حال، صرف‌نظر از بصیرتی که چنین محاسباتی حکایت از آن دارند، کشف این روش تقسیم طولانی، که با در نظرگرفتن کلیهٔ محاسبات آن دقیقاً همان روش تقسیم طولانی امروزی ماست مساهمتی زیبا در تاریخ ریاضیات است، و ظاهراً باید دستاوردی مشترک کرجی و سموئل باشد.

بخش ۷. عمر خیام و معادلهٔ درجهٔ سوم

زمینه‌های اثر خیام

بحث خیام راجع به معادلات درجهٔ سوم را می‌توان در کتاب جبر وی پیدا کرد کتابی که آن را در سمرقند کامل، و به قاضی‌القضاة شهر، ابوطاهر تقدیم کرد. در مقدمهٔ این اثر از زندگی پریشان خود تا آن زمان چنین اشاره می‌کند:

> من همواره سخت اشتیاق به تحقیق استدلالی این اصناف [معادلات] و جداکردن حالات ممکن و ممتنع هر صنف داشتم. چون می‌دانستم که این امر در حل مسائل دشوار شدیداً مورد احتیاج است. لیکن تصاریف زمان همواره با پیشامدهایی همراه بود که پرداختن به این امر را به عهدهٔ تعویق می‌انداخت، و برای من فراغتی نمی‌گذاشت که صرف تدوین این مطلب کنم و فکر خود را بر آن متمرکز سازم زیرا، گرفتار روزگاری هستیم که از اهل علم فقط عدهٔ کمی، مبتلی به هزاران رنج و محنت، باقی مانده، که پیوسته در اندیشهٔ آنند که

جدول ۴-۳

مال	شیء	واحد	ج ش	ج م	ج ک	ج م م	ج م ک	ج ک ک	ج م م ک	ج م ک ک
		$3\frac{1}{2}$	۵	$-6\frac{1}{2}$	−۱۰	$13\frac{1}{2}$	۲۰	$-26\frac{1}{2}$	−۴۰	
۲۰ ۶	۳۰ ۰	۱۲								
	۳۰ ۶	−۴۰ ۰	۱۲							
		−۴۰ ۶	−۶۰ ۰	۱۲						
		−۶۰ ۶	۸۰ ۰	۱۲						
			۸۰ ۶	۱۲۰ ۰	۱۲					
				۱۲۰ ۶	−۱۶۰ ۰	۱۲				
					−۱۶۰ ۶	−۲۴۰ ۰	۱۲			
						−۲۴۰ ۶	۳۲۰ ۰	۱۲		
							۳۲۰ ۶	۴۸۰ ۰	۱۲	

غفلتهای زمان را فرصت جسته به تحقیق در علم و استوارکردن بپردازند[1].

وقتی که خیام امنیت خاطری می‌یافت تا حواس خود را بر مسئله‌ای متمرکزکند از قوهٔ نبوغ شگرفی برخوردار می‌شد. بیهقی، که از جمله کسانی است که شرح حال خیام را نوشته است، از قدرت حافظهٔ خیام سخن می‌گوید که چگونه زمانی کتابی را هفت بار در اصفهان خوانده و آن را به خاطر سپرده است. در مراجعت آن را از حفظ نوشته و بعداً که با اصل کتاب مقایسه به عمل آمده معلوم شده است که اختلاف بسیار اندک بوده است. اما چابک ذهنی خیام به هیچ وجه به حافظه‌ای عالی محدود نمی‌شده است و این را در مرور بخشهایی از اثر عظیمش، جبر، ملاحظه خواهیم کرد.

در مقدمه بر این اثر، خیام متذکر می‌شود که هیچ بحث جبری در مسائلی که وی به آنها می‌پردازد، از پیشینیان به او نرسیده است، ولی از متأخران، نویسنده‌ای به نام ابوعبدالله ماهانی تحلیلی جبری در مورد لمی از ارشمیدس به نگارش درآمده است، لمی که ارشمیدس در قضیهٔ چهارم از مقالهٔ دوم اثرش

۱ـ ترجمهٔ فارسی نقل از «حکیم عمر خیام به عنوان عالم جبر» تألیف زنده یاد دکتر غلامحسین مصاحب است، انتشارات انجمن آثار ملی، تهران ۱۳۳۹ (عبارت فارسی کمی طولانیتر از عبارت نقل شده از ترجمهٔ انگلیسی در اصل کتاب است.) ـ م.

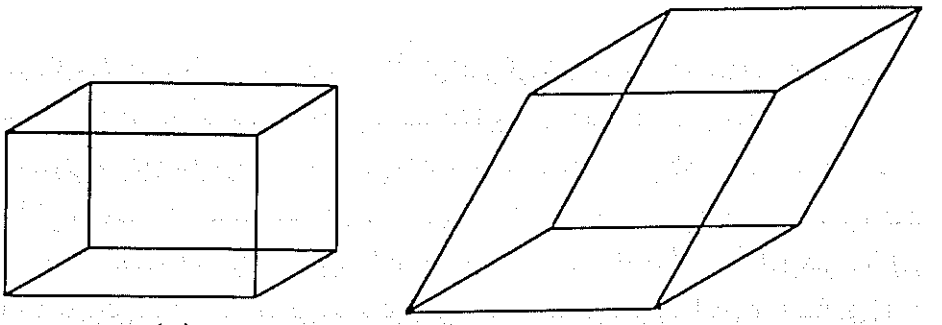
موسوم به *کره و استوانه* به کار برده است و ما قبلاً بدان اشاره کرده‌ایم، و این مسئله همانا مسئلهٔ بریدن کره با صفحه‌ای است که حجم دو قسمت حاصل به نسبت مفروضی باشد. ارشمیدس ثابت کرد که این مسئله را در صورتی می‌توان حل کرد که قطعه خطی مانند a به دو قسمت b و c چنان تقسیم شود که نسبت به c به طولی مفروض مثل نسبت مساحتی مفروض بر b^2 باشد. اگر فرض کنیم $b = x$، خواهیم داشت $c = a - x$ و نسبت را می‌توان به صورت $x^3 + m = nx^2$ نوشت، که در آن m حاصل‌ضرب طول و مساحت مفروض است. خیام می‌گوید که نه ثابت بن‌قره، و نه ماهانی که بین سالهای ۸۲۵ میلادی [۲۰۴ هجری]تا ۸۸۸ میلادی [۲۶۷ هجری] می‌زیسته‌اند و بنابراین معاصر خوارزمی بوده‌اند، موفّق به حل این معادله نشده‌اند، ولی ریاضیدانی از نسل بعد موسوم به ابوجعفر خازن، توانست آن را از قطع دادن با مقاطع مخروطی حل کند. سپس، ریاضیدانان متعددی به پیروی از ابوجعفر به حل انواع خاص این معادلات که از درجهٔ سوم بودند دست یازیدند، ولی کسی در بر شمردن همهٔ معادلات ممکن از این نوع و حل همهٔ آنها کوشش به عمل نیاورد. خیام می‌گوید که این کار را او در رساله‌اش انجام خواهد داد.

طبقه‌بندی معادلات درجهٔ سوم به وسیلهٔ خیام

اینک به شرح برخی از بخشهای رسالهٔ خیام، جبر، می‌پردازیم، و تأکید می‌کنیم که گرچه از «معادلات» و «ضرایب» صحبت می‌کنیم، خیام اینها را به طور نمادی نمی‌نویسد، زیرا او حتی برای اعداد فقط از الفاظ استفاده می‌کند.

خیام در بخش اول رساله‌اش همهٔ انواع معادلاتی را که در آنها جملات بالاتر از درجهٔ سه ظاهر نمی‌شوند، فهرست می‌کند. در معادلات خیام همهٔ جملات، ضرایب مثبت دارند به‌طوری که، گرچه از نظر ما $x^3 - 3x + 8 = 0$ و $x^3 + 3x - 8 = 0$ از یک نوعند، از نظر خیام این دو متفاوت محسوب می‌شوند، وی اولی را به صورت «کعبی و عددی معادل جذری است» ($x^3 + 8 = 3x$) بیان می‌کرد و آن را از «کعبی و جذری معادل عددی است» ($x^3 + 3x = 8$) متمایز می‌دید. بنابراین، وی به ۲۵ نوع معادله می‌رسد، و در باقیماندهٔ رساله‌اش نشان می‌دهد که چگونه می‌توان ۱۱ نوع از این معادلات را با روشهای اقلیدسی و ۱۴ نوع آن را با مقاطع مخروطی حل کرد. برای هر یک از این ۱۴ نوع خیام بخش کوتاهی را به این امر اختصاص می‌دهد که چگونه می‌توان با استفاده از مقاطع مخروطی پاره‌خطی را ایجاد کرد که بتوان از آن اجسام صلبی ساخت که در رابطهٔ مطلوب صدق کنند. هر کس که ترجمهٔ انگلیسی [جبر خیام] به توسط کشیر[1] را بخواند، استدلالات خیام را بس روشن خواهد یافت و، نیز، از نکات متعدد جالب توجهی در تاریخ انواع مختلف معادلات مطلع خواهد شد.

۱ـ D.S.Kasir



شکل ۴-۸

بحث خیام دربارهٔ $X^3 + mx = n$

مقدمات

معادله‌ای که می‌خواهیم از آن صحبت کنیم «کعبی وجذری معادل عددی است»، یعنی معادلهٔ «$x^3+mx = n$» است، و، برای درک بخشی از اثر او که برای ارائه برگزیده‌ایم باید به یاد داشته باشیم که هرگاه ABC یک سهمی به رأس B و پارامتر p باشد و هرگاه x طول نقطه‌ای دلخواه و y عرض متناظر آن باشد آنگاه $y^2 = px$.

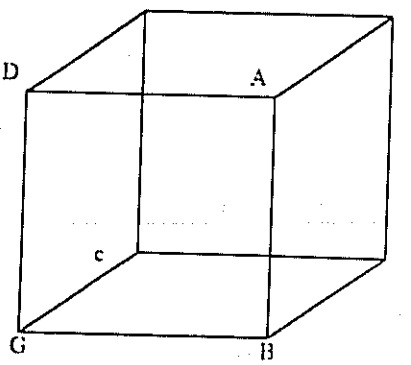
خیام بحث را با لمی دربارهٔ اجسام موسوم به متوازی‌السطوح، که دارای سه زوج وجه متوازی است، آغاز می‌کند (شکل ۴ – ۸ (آ))، وقتی که جمیع وجوه، مانند وجوه یک قطعه آجر، مستطیلند (شکل ۴ – ۸ (ب))، جسم را مکعب مستطیل می‌نامند. یکی از وجوه یک متوازی‌السطوح به دلخواه به عنوان قاعدهٔ آن تعیین می‌شود، و لم خیام به حالتی مربوط می‌شود که قاعده یک مربع است.

لم. *مکعب مستطیل* ABGDE (*شکل* ۴ – ۹)، *که قاعدهٔ آن مربع* ($ABGD(=a^2)$، *وارتفاع آن* c *است*، *مفروض می‌باشد و مربع دیگری مانند* $MH = b^2$ *نیز مفروض است. روی* MH *یک مکعب مستطیل طوری بسازید که مساوی جسم مفروض باشد.*

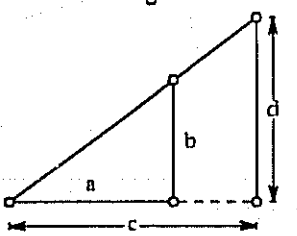
حل. با استفاده از هندسه اقلیدسی پاره‌خطی مانند k را چنان بسازید که $a : b = b : k$؛ و سپس h را طوری بسازید که $a : k = h : c$. در این صورت جسمی که قاعدهٔ آن b^2 و ارتفاعش h باشد مساوی جسم مفروض است.

برهان. از $a : b = b : k$ نتیجه می‌شود که $a : k = (a : b) \cdot (b : k) = (a : b) \cdot (a : b)$؛ $a^2 : b^2$؛ ولی $a : k = h : c$، و بنابراین $a^2 : b^2 = h : c$، و این بدین معنی است که $a^2 \cdot c = b^2 \cdot h$. بنابراین جسمی که قاعدهٔ آن b^2 و ارتفاعش h است مساوی جسم مفروض $a^2 \cdot c$ است، یعنی همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

این لم از لحاظ جبری ریشهٔ معادلهٔ $a^2 \cdot c = b^2 \cdot x$ را، که در آن a، b، و c مفروضند، می‌خواهد، و ترسیم خیام جواب $(a^2 \cdot c/b^2)$ را، ابتدا با به دست آوردن $k = b^2/a$ و سپس $h = (ac)/k = a^2 \cdot c/b^2$، به دست می‌دهد. نتیجهٔ اساسی، که به توسط خیام معلوم فرض شده، این است که با مفروض بودن سه



شکل۴-۹



شکل۴-۱۰

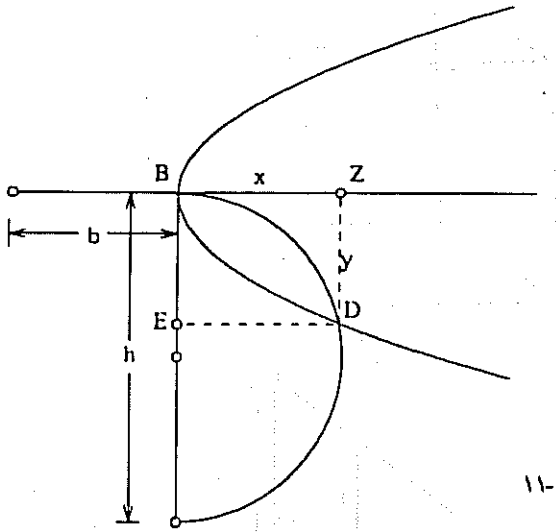
پاره‌خط راست a ، b ، و c می‌توان پاره‌خط چهارمی مانند d چنان پیدا کرد که $a : b = c : d$. پاره‌خط d را «جزء چهارم تناسب» می‌نامند ، و شکل ۴ – ۱۰ طرز ترسیم d را نشان می‌دهد .

بحث اصلی

اینک خیام به اولین معادلهٔ نسبتاً دشوار خود می‌رسد ، معادله‌ای که آن را به صورت «کعبی و جذری معادل عددی است» توصیف می‌کند ، یعنی حالتی که ما آن را به صورت $x^3 + mx = n$ می‌نویسیم ، که m و n مثبتند . برای این حالت روش زیر را ارائه می‌دهد : فرض کنیم b ضلع مربعی باشد که مساوی عدد و جذرهاست ، یعنی $b^2 = m$ ، و فرض کنیم h ارتفاع مکعب مستطیلی باشد که قاعدهٔ آن b^2 و حجمش n است . (ترسیم h فوراً از لم قبل نتیجه می‌شود .) حال سهمی‌ای را (مطابق شکل ۴ – ۱۱) که رأس آن B ، محورش BZ و پارامترش b است در نظر بگیرید ، و h را در B به صورت عمودی بر BZ قرار دهید . نیمدایره‌ای به قطر h رسم و فرض کنید که این نیمدایره سهمی را در D قطع می‌کند . از D عمود DE را بر h اخراج و عرض DZ را عمود بر BZ فرود آورید . در این صورت $DZ = EB$ و با توجه به $y = BE$ نتیجه می‌شود که $y^3 + my = n$.

برهان . فرض کنیم $BZ = x$. به موجب خواص سهمی تساوی $y^2 = bx$ برقرار است و ، به موجب خواص دایره ، تساوی $x^2 = y(h - y)$. ولی تساوی اول را می‌توان به صورت $x : y = y : b$ و تساوی دوم را به صورت $x : y = (h - y) : x$ نوشت . بنابراین $x : y = x : y = y : b = (h - y) : x$ ، یا ، با عکس کردن $b : y = y : x = x : (h - y)$. بنابراین

$b^2 : y^2 = (b : y)(b : y) = (y : x)(x : (h - y)) = y : (h - y)$ ، و لذا



شکل۴-۱۱

$b^2 \cdot (h - y) = y \cdot y^2$، یعنی $b^2 \cdot h - b^2 \cdot y = y^3$. بنابراین، در صورتی که $b^2 \cdot y$ را به هر دو طرف اضافه کنیم نتیجه می‌شود که $b^2 \cdot h = y^3 + b^2 y$. اینک هرگاه به جای $b^2 \cdot h$ مساوی آن، n، و به جای b^2 مساوی آن، m، را قرار دهیم، نتیجه می‌گیریم $y^3 + my = n$، که همان معادله‌ای است که می‌خواستیم حلش کنیم.

می‌توان این استدلال را قدری مختصرتر نوشت زیرا از $y^2 = bx$ نتیجه می‌شود که $y^4 = b^2x^2$، و $x^2 = y(h - y)$ نتیجه می‌دهد که $b^2x^2 = b^2y(h - y)$. بنابراین، $y^4 = b^2x^2 = b^2y(h - y)$ و لذا، با توجه به اینکه $y \neq 0$، $y^3 = b^2(h - y)$، یعنی

$$y^3 + my = y^3 + b^2 \cdot y = b^2 \cdot h = n$$

و معادله حل می‌شود.

بحث خیام دربارهٔ تعداد ریشه‌ها

در سرتاسر بحث خیام مراقب است تا خواننده را متوجه سازد که ممکن است در حالتی خاص [معادله] دارای بیش از یک جواب (یا بهتر است بگوییم بیش از یک جواب حقیقی مثبت) باشد یا اینکه اصلاً جوابی نداشته باشد. آنچه که در هر حالت مفروض اتفاق می‌افتد بستگی به این دارد که مقاطع مخروطی‌ای که وی از آنها استفاده می‌کند در هیچ نقطه یکدیگر را قطع نکنند، یا در یک یا دو نقطه یکدیگر را قطع کنند. به عنوان مثال، او جواب $x^3 + n = mx$ را با قطع دادن یک سهمی و هذلولی به دست می‌آورد و متذکر می‌شود که ممکن است دو منحنی متقاطع نباشند که در این صورت هیچ جوابی موجود نخواهد بود، ولی در صورت تقاطع، یا بر هم مماس‌اند یا در دو نقطه متقاطعند. با اصطلاحات جدید این مطلب را به این صورت بیان می‌کنیم که معادلهٔ $x^3 + n = mx$ یا فاقد جواب حقیقی مثبت است یا دارای دو جواب است. در حالت اخیر دو جواب می‌توانند یک جواب، یعنی ریشهٔ مکرر، متناظر با عاملی مانند $(x - a)^2$، باشند یا اینکه دو

ریشهٔ متمایز داشته باشند. دوباره در مورد حالت $x^۳ + n = mx^۲$ متذکر می‌شود که اگر $m \geqslant \sqrt[۳]{n}$، آن‌گاه جوابی وجود ندارد. زیرا هرگاه $m \geqslant \sqrt[۳]{n}$، آن‌گاه

$$n = (\sqrt[۳]{n})^۳ = \sqrt[۳]{n}(\sqrt[۳]{n})^۲ \geqslant m(\sqrt[۳]{n})^۲ \qquad (۱)$$

از اینجا نتیجه می‌شود که هرگاه x جواب دلخواهی باشد آن‌گاه $x > \sqrt[۳]{n}$، زیرا $x^۳ + n = mx^۲$ نتیجه می‌دهد که

$$mx^۲ > n \qquad (۲)$$

بنابراین با ترکیب (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که

$$mx^۲ > n \geqslant m(\sqrt[۳]{n})^۲ \quad ،\quad \text{بنابراین} \quad mx^۲ > m(\sqrt[۳]{n})^۲ \quad \text{یعنی،} \quad x > \sqrt[۳]{n}$$

بنابراین از $m \geqslant \sqrt[۳]{n}$ نتیجه می‌شود که به ازای هر جواب مانند x، $x > \sqrt[۳]{n}$.

از طرف دیگر، به ازای هر جواب x، $x^۳ < mx^۲$، بنابراین $x < m < \sqrt[۳]{n}$، و این با $x > \sqrt[۳]{n}$ متناقض است. بنابراین خیام ثابت کرده است که هرگاه $m \geqslant \sqrt[۳]{n}$، آن‌گاه $x^۳ + n = mx$ دارای جواب (حقیقی مثبت) نیست.

خواننده باید توجه داشته باشد که ما استدلال خیام را به وسیلهٔ جبر نمادی جدید، محصولی از رنسانس اروپایی، ارائه دادیم. خیام در استدلال خود یا از کمیات هندسی یا از اعدادی که تعبیر هندسی دارند استفاده می‌کند، و تنها علامتهای ریاضی که خیام به کار می‌برد عبارت از حروفی هستند که در نمودارهای هندسی نقاط را نشان می‌دهند. بنابراین، به عنوان مثال، در مورد استدلال گذشته، خیام شرط $m = \sqrt[۳]{n}$ را چنین بیان می‌کند. «AC را مساوی عدهٔ مالها (m) می‌گیریم و مکعبی مساوی عدد مفروض (n) می‌سازیم و فرض می‌کنیم n ضلع آن باشد... اگر n مساوی AC باشد، مسئله ممتنع است، زیرا...». (خشنودی خیام از این کشف که بعضی از حالات که پیشینیان آنها را ممتنع می‌پنداشته‌اند درواقع ممکن هستند، در جای‌جای این رساله آشکار است.)

با این حال، با تأکیدی که بر شکل هندسی استدلال خیام داشته‌ایم باید این را نیز تذکر دهیم که خیام اثر خود را کاری در زمینهٔ جبر تلقی می‌کرد. پس از حمد و ثنا بر خداوند و درود بر پیامبر او محمد [ص] می‌گوید «یکی از مباحث ریاضی که در قسمتی از حکمت که معروف به علوم ریاضی است محتاج‌الیه می‌باشد، فن جبر و مقابله است که برای استخراج مجهولات عددی و هندسی وضع شده است...» سپس فصل اول را با این گفته آغاز می‌کند که

> به یاری خدا و توفیق نیک وی، گویم فن جبر و مقابله فنی است علمی که موضوع آن عدد مطلق و مقادیر قابل سنجش است از آن جهت که مجهولند ولی مرتبط با چیز مجهولی هستند که به وسیلهٔ آن می‌توان آنها را استخراج کرد. و این چیز یا کمیتی است، یا رابطه‌ای که بستگی معلوم و مجهول منحصر به آن است،

و از بررسی و تحلیل مجهولات موضوع مسئله استنباط می‌شود. مطلوب علم جبر عوارضی است که به موضوع آن، از آن جهت که ـ به شرح مذکور ـ موضوع آن است، ملحق می‌شود.

اگر این روابط که ما را از معلوم به مجهول می‌رسانند چنان باشند که از خواص اشکال هندسی ناشی شوند، در نظر خیام چیزی از مسائل جبری کم ندارند. این به کار بردن روابط مفروض برای یافتن مجهول است که نشان عیار جبری می‌باشد و نه چیز دیگر.

درواقع، اگر چه رسالهٔ خیام جوابها را به صورت پاره‌خط بیان می‌کند و نه به صورت اعدادی که تابعی از ضرایب معادله‌اند، می‌دانیم که خیام در پی‌یافتن چنین اعدادی بوده است زیرا می‌نویسد: «... و اما اثبات [حل] این اصناف وقتی موضوع مسئلهٔ عدد مطلق باشد ـ جز در سه مرتبهٔ اول، و آن [معادلهٔ بین] عدد و شئ و مال است ـ بر ما و بر دیگر علمای جبر ممکن نشده است، و شاید دیگران که بعد از ما آیند بر آن وقوف یابند.»

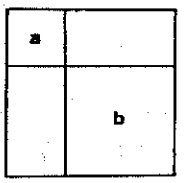
خیام انتظار پیشگویانه‌ای داشت، زیرا در اوایل سدهٔ شانزدهم در ایتالیا گروهی از جبردانان قطعات مختلف معما را کنار هم گذاشتند، و در سال ۱۵۴۵ میلادی پزشک و منجّمی به نام جیرولاموکاردانو [کاردان]، درست مانند خیام، تحلیل حالت به حالت معادلهٔ درجهٔ سوم را در اثر خود، *آرس ماگنا* (*فن‌کبیر*)، منتشر ساخت، اما این بار ریشه‌ها نه برحسب پاره‌خطها و بلکه به صورت اعدادی که تابعی از ضرایب معادله‌اند بیان شدند. کاردان به جای مقاطع مخروطی، از اتحادهایی مانند $(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-b^3$ استفاده کرده بود تا نشان دهد که جواب معادلهٔ درجهٔ سوم را می‌توان از حل یک معادلهٔ درجهٔ دوم وابسته و سپس استخراج ریشه‌های سوم ـ که حل هر دوی آنها مدتها قبل از عصر خیام به طور عددی مقدور بودند ـ به دست آورد. دستوری که کاردان برای ریشه‌ای از معادلهٔ $x^3+px=q$ منتشر کرد چنین است:

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}$$

و به این طریق آرزوی خیام چهارسده بعد تحقق یافت.

بخش ۸. بعد اسلامی: جبر ارثها

برای ارائهٔ روشهای دیگر ریاضی که در خدمت اسلام بودند، مانند آنچه در مبحث مربوط به حساب عمل شد، به نیمهٔ دوم کتاب جبر خوارزمی و به مسئله‌ای در علم ارثها (علم‌الوصایا) باز می‌گردیم. این علم، که شاید خواننده به خاطر بیاورد، مستلزم به کار بردن قانون شرع و جبر برای محاسبهٔ سهمهای ماترک است زمانی که پای ارث به بیگانه‌ای در مسئله در میان باشد.



شکل ۴-۱۲

خوارزمی مثال زیر را دربارهٔ کاربرد جبر در حالتی که میراثی در بین است می‌آورد:

مردی درگذشت و از او دو پسر برجای ماند، وصیت کرد که یک سوم مالش را به مردی بیگانه بدهند، ترکهٔ او ده درهم عَیْن بود، به اضافهٔ ده درهم دَیْن که از یکی از دو فرزندش طلبکار بود.[۱]

بندهای مربوط به قانون ارث اسلامی چنینند:

(۱) وارث قانونی تنها می‌توانند از پرداخت آن بخش از ارث که از یک سوم ماترک بیشتر می‌شود امتناع کنند، بنابراین در این حالت ارث باید پرداخت شود؛

(۲) مازاد دین ادا نشدهٔ فرزند از آنچه سهم قانونی او خواهد شد، هبه به پسر تلقی می‌شود؛ و

(۳) هبه مقدم بر سهم‌الارث و سهم‌الارث مقدم بر سهمهای قانونی است.

برای حل این مسئله، خوارزمی فرض می‌کند x سهم‌الارث هر یک از پسران باشد. چون هبه باید قبلاً پرداخت شود، تنها سهم شرعی از ۱۰ درهم قرض برداشته شده و به ۱۰ درهم نقد [= عَیْن] اضافه می‌شود تا ماترک $x + ۱۰$ را تشکیل دهد. به بیگانه اینک یک سوم این مبلغ، و به هر پسر x می‌رسد، بنابراین $x + ۱۰ = \frac{(۱۰ + x)}{۳} + ۲x$ و لذا $x = \frac{۱۰ + x}{۳}$، پس $x = ۳\frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}x$. حال هرگاه به دو طرف نصف هر طرف اضافه شود، $\frac{۲}{۳}x$ به x و $۳\frac{۱}{۳}$ به ۵ تبدیل می‌شود. (به خاطر آورید که حساب، بخشهایی جداگانه در نصف کردن یک عدد داشت.) بنابراین سهم شرعی ۵ است، به بیگانه $۵ = \frac{(۱۰ + ۵)}{۳}$ می‌رسد و هبه ۵ است.

تمرینها

۱. نشان دهید از بین شش نوع معادلهٔ درجهٔ دوم خوارزمی، نوع چهارم، $x^۲ + n = m$، تنها معادله‌ای است که می‌تواند دو جواب مثبت داشته باشد.

۲. برهانی مشابه با برهان حالت اول در مورد شکل دوم قضیهٔ ۵ مقالهٔ ۲ *اقلیدس* پیدا کنید.

۳. با مراجعه به بحث ثابت بن‌قره در مورد دومین صورت اساسی معادلهٔ درجه دوم، نشان دهید که هرگاه $a^۲ + q = pq$ آنگاه p از a بزرگتر است.

۴. با استفاده از شکل ۴ − ۱۲ ثابت کنید $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + ۲\sqrt{ab}}$ و ضمن رسم نموداری ثابت کنید که $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a + b - ۲\sqrt{ab}}$.

۵. تحقیق کنید که سه کمیت مسئلهٔ ۶۱ کتاب ابوکامل، b، yb، و zb، نه تنها در شرط اینکه مجموعشان ۱۰ است صدق می‌کنند، بلکه در دو شرط دیگر مسئله نیز صدق می‌کنند.

۶. فرض کنید $f(x, y, \ldots, w)$، $g(x, y, \ldots, w)$، ...، $k(x, y, \ldots, w)$ چند جمله‌ایهای همگن باشند

۱ـ ترجمهٔ فارسی نقل از «جبر و مقابله» محمد بن موسی خوارزمی ترجمهٔ زنده یاد حسین خدیوجم است، (صفحهٔ ۱۲۳) نشریهٔ ۴۴ کمیسیون ملی یونسکو در ایران، از انتشارات کمیسیون ملی تربیتی، علمی و فرهنگی سازمان ملل متحد (یونسکو) در ایران، ۱۳۶۲.

و f از درجهٔ ۱ باشد. هرگاه c عدد ثابت ناصفری باشد، نشان دهید که شرایط $f(1,y,\ldots,w)=c$، $g(1,y,\ldots,w)=\ldots=u(1,y,\ldots,w)=0$ برقرارند اگر و تنها اگر، با شرطهای $x=(\frac{d}{c})X$، $y=(\frac{d}{c})Y$، غیره، داشته باشیم $f(x,y,\ldots,w)=d$ و $g(x,y,\ldots,w)=\ldots=k(x,y,\ldots,w)=0$. همچنین همهٔ این توابع و ثابتها را در مسئلهٔ ابوکامل مشخص کنید.

۷. نشان دهید ریشه‌ای که ابوکامل برای معادلهٔ ناشی از مسئلهٔ ۶۱ پیدا کرد مثبت، ولی از ۵ کوچکتر است، در صورتی که ریشهٔ دیگر معادله از ۵ بیشتر است. نتیجه بگیرید که ریشه‌ای را که ابوکامل مشخص کرده مقدار درست $b=\frac{10}{a}$ است.

۸. با استفاده از روش سموئل در مورد تقسیم، خارج قسمت $2x^3-11x^2-13x-5$ را بر $2x-5$ بیابید.

۹. این مسئله از خوارزمی را حل کنید. از صاحب مالی پس از مرگ، دو پسر برجای می‌ماند، و ترکهٔ او ده درهم عَیْن و ده درهم دَیْن است که از یکی از پسرانش طلبکار است، و او وصیت می‌کند که یک پنجم از تمام مالش را به‌اضافه یک درهم به مرد بیگانه‌ای بدهند[1]. سهم هر یک از وراث را محاسبه کنید.

کتابنامه

Abū Kāmil and Shujā[e]b. Aslam, *Algebra*(transl. and comm. by M.Levey). Madison, WI:University of Wisconsin Press, 1966.

Gandz, S. "The Algebra of Inheritance" .*Osiris* 5 (1938), 319-391.

al-Khayyāmī, [e]Umar. *The Algebra*(transl. and comm. by D. S. Kasir as *The Algebra of Omar Khayyam)*. New york: 1931.

ترجمهٔ دیگری از این کتاب عبارت است از

Winter H.J.J. and W. [e]Arafat. "The Algebra of [e]Umar Khayyam", *Journal of the Royal Asiatic Society of Bengal.* Science 16(1950), 27-70.

al-Khwārizmī,Muhammad b. Mūsā,(transl.by F.Rosen). *The Algebra of Muhammed ben Musa.* London: 1831.

Rashed, R. "Récommencements de l' Algèbre au XI[e] et XII[e] Siecles". In: *The Cultural context of Medieval Learning* (J. E. Murdoch and E. D. Sylla, eds.). Dordrecht: Reidel, 1975, pp. 33-60.

Sesiano, J. "Les Méthodes d' analyse indéterminée chez abū Kāmil", *Centaurus* 21 (NO.2) (1977), 89-105.

۱ـ ترجمهٔ فارسی نقل از «جبر و مقابله خوارزمی» ترجمه زنده‌یاد حسین خدیوجم با اندکی تصرف. ـ م.